40.00
pp. 137 + 94
wants 2 Kanks
K4, l4

THE LIBRARY OF CONGRESS
RARE BOOK COLLECTION

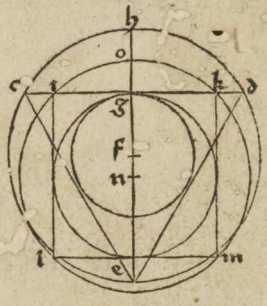
24
ST
ww v.

DOCTISSIMI VIRI ET MATHEmaticarum disciplinarum eximij professoris

IOANNIS DE REGIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNIMODIS LIBRI QVINQVE:

Quibus explicantur res necessarie cognitu, uolentibus ad scientiarum Astronomicarum perfectionem deuenire: quæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ habeantur, frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspiret.

Accesserunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione: itemq; Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτικὰ, hactenus à nemine publicata.



Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia singulari. Norimbergæ in ædibus Io. Petrei.

ANNO CHRISTI

M. D. XXXIII.

BIBLIOTH. PALAT. VINDOBON.
DUPL.

IOANNES SCHONE-

RVS CAROLOSTADIVS AMPLISS. SENA-
torum Ordini ciuitatis Noricæ Dominis prudentiſs. S. P. D.

TINAM prudentiſſimi Domini, ita Deo uiſum fuiſſet, ut qua occaſione nunc ego ſum uſus ad celebrandam rempubl. ueſtrã, dum uobis optimis ſcriptis doctiſſimi hominis Iohannis de Regio monte dedicandũ putaui, ea autor ipſe in ueſtra florentiſs. urbe excudendo cum hoc tum alia plurima ad illius immortalem gloriam uti potuiſſet: Nimirum ut abſolutius hoc opus in lucem exiret, ita maiorem famã excitaret ciuitatis ueſtræ. Sed quia hanc non ſolum in iſta parte uobis felicitatem, ſed innumerabilibus alijs, ſua illa morte abſtulit, faciendum ſcilicet quod euenit, quando id quod uolumus non licet: Hoc eſt conandum ut quantumcunq; quidem & qualecunq; illius uiri in manus noſtras peruenerit, communicetur ſtudioſorum utilitati. Nihil eſt illo enim quamuis imperfectum atq; inornatum aut etiam diſiectum, quod non maximi pendi debere uideatur. Optandum certe, ut quia Regiomontanum ab officina, unde tot egregia opera emitterentur, quot indice præmiſſo indicauerat, in Italiam retraxerat uocatio, honeſtiſs. ea quidem, ſed cui obſecutus reuerteretur nunquam, ab eo relicta ſaltem monumenta cum ipſius tum aliorum ueterum potiſſimum laborum, conſeruarentur: Sed hæc ipſa quædam ita uaſtauit calamitas, ut ex tanta tamq; ſplendida copia, qualem indices oſtendunt, perpauculæ reliquiæ ad nos peruenerint. Quarum ipſarum non abſq; præcipua utilitate ſua & habente à nobis nonnihil ſtudioſi, & ſi Deus ſucceſſum aſpirarit conatibus meis, habituri ſunt. Hunc autem librum, cui de Triangulis omnimodis ipſe autor titulũ indidit, clariſſimus ordinis ueſtri uir, Bilibaldus Pircamerus, illo tempore, quo tam ſpecioſa ſuppellex Regiomontani parum diligenter conſeruabatur, cum, ut ſæpe dicere audiuimus, magna pecunia comparaſſet, non tam ſibi quàm ſtudioſis diſciplinarum Mathematicarum: Hunc igitur ipſum librum, uiſum Deo fuiſſet, ut ab eo, quem dixi clariſs. uiro Bilibaldo Pircamero in lucem æderetur: quem ut uirtute & ſapientia, ita literis quoq; & doctrina fuiſſe inſtructiſſimum ſcimus, de quo in præſentia neq; res fert, ut multum uerborum faciamus, neq; ipſius uirtutis ac eruditionis magnitudo patiatur poteſt eſſe contenta, quem in uita, ut dilexerant, ueneratiq; fuerant docti omnes, ſic nunc ea defunctum deplorant atq; lugent. Magnum hoc illi tribuentes ac certiſſ. teſtimonium iudicij ſui, cui in epiſtolæ breuitate quis etiam præſtans eloquentia nedum infacundus ego ſatisfacturum ſe ſperet? Redeo igitur ad propoſitum. Ergo etiam hanc comoditatem præcidit ſiue Deus ſiue fortuna, ſatius eſſe iudicauimus, etſi minus pulcram, optimã tamẽ per ſe mercem contingere ſtudioſis expoſitione noſtra, q̃ ut retenta omnino ea carerent. Et eſt primus ſanè liber ad eum modũ ab autore percultus, ut neq; ipſo edente melius habiturus fuerit. Reliquis extrema manus & limæ labor non acceſſit, nã numeros præcedentium propoſitionum, quibus ſequentia probabat, leui ſanè uel nulla potius legentium iactura feſtinabundus paſſim aſcribere neglexit, in quibus neq; nos uoluimus ingenium induſtriamq; noſtram oſtentare, quamuis id facile fuerit, & hoc quiſq; ſibi ipſe p̃ſtare poſſit, ſed fide maxima curauimus de archetypo in aliquot exempla trãſcribi, quæ patrocinio ueſtro Domini Prudentiſſ. uiſum eſt tuta defenſa q; publicare. Non parua in ſpe gauiſuros uos tam honeſtã

uobis clientelam obtigisse, qui omnes bonas res cupiditate ac promptitudine in rep. uestra, quæ quidem eatenus abfuerint, instituere, constitutas autem diligentia & cura singulari conseruare soleatis. Neq; parum hac uos confido credituros ornatum iri editione Regiomontani sub nomine uestro scriptorum, quandoquidē illi uiuo V. ciuitati famam, quam destinarat, negatum fuit parere. Cum enim hāc mors ipsius excluserit, una hæc ratio fuerit & instaurandæ illius & conciliandæ alterius generalis cuiusdā benignitatis nimirū & fauoris erga bonas artes uestræ. Qua his turbulentiss. temporibus inter has stultitias hominum complecti nos uideamus penè desertas illas ab omnib. mortalib. Qua de caussa quantas laudum quamq; præclaras materias deducere possem quis non intelligit? Quid enim præconiō literarum & harum protectio dignius? Aut quo in argumento libentius illæ uires suas & celebratione cultorum ac defensorum suorum exercituræ uideantur, sed mihi in suscipiendo hoc onere considerandum scilicet, non solum quid cupiam, sed etiam ac multo magis quid ualeam. Ne si parū dextre quod uereor hanc rem administrauerim, & illæ iure de malo interprete, & V. Pr. detritore splēdoris sui cōqueri possint. Relinquam igitur hanc aliis prouinciam, qui gerant gnauiter, cuiusmodi ut scio fuisse, ita futuros multos arbitror. Hoc modo uos orabo, ne qua re patiamini opt. & sanctiss. hoc uobis propositum extorqueri, quo retento immortalem profecto gloriam consequemini, qua & ipsi frui & quam posteris uestris relinquere possitis. Qualia hæc sint tempora uidetis, planè enim ut renascentes artes nemo magnopere respexit, illæq; suum tacitæ caput protulere, ita neglectas stertentib. homin. ib. interituras esse metuendum. Deus, solus enim Deus, conseruare poterit, hanc immittendo Principib. & Ciuitatib. mentē, ut rigare arentes & caducas fulcire cupiant. Quod ut hactenus â uobis strenue factū cernimus, ita uos oro obtestorq; per hoc nomine quæsitā celebritatem, ne intermittere uelitis. Ad me & hunc laborem meum quod attinet, satis fuerit mihi comprehendi me â uestra benignitate in uulgari numero literatorum, quos etiam cū uos omnes tueri foueregq; constet, nō timeo ne uobis ego excidam, nēue post hanc etiam quasi indicationē nostri â uobis negligar. Valeté Domini prudentiss. ex urbe uestra Norica pridie Iduum Sextil. anno salutiferi partus M. D. XXXIII.

LECTORIBVS.

Etsi uidebamur quibusdam de indicijs coniecturam certam fecisse, cui autor epistolam dedicationis conscripsisset, autoritate & doctrina præstantissimo, ut ipse ait, uiro, tamen quia in archetypo, quod manu ipsius descriptum esset, nominatim erat nullius præfixa mentio, maluimus relinquere huius etiam rei uobis arbitriũ quàm nostrum iudicium interponere. Gratiorem rati uobis diligentiam fidelitatemq; nostram, quàm in alieno libro ingenium & sapientiam futuram. Valete.

VAMVIS hosce triangulorum libellos post epitoma cõscripserim, præpostero fretus ordine, posterius quidẽ opus texendo introductoriũ, q̃ artem ipsam tradiderim: nemini tamen triangulos nostros prætereunti astrorum disciplina satis agnoscetur. Quod si quispiam inique factũ insimulet, is nisi me animus fallit, iure quiescet, ubi maiorum parere monitis & æquum & bonum arbitrabitur. Sanè moribundo præceptori morem gestum oportuit, qui absolutis nuperrime sex luminariũ libris, superstites septẽ Ioanni suo reliquit, imò mandauit q̃ citissimum expediendos. Tantum nempe apud eũ ualuit Bessarionis imperium, ut quod incolumis adhuc principi spoponderat dignissimo, iuxta iam morituruꝰ explere curaret. Igitur iussa præceptoris capessenti mihi, plurimus triangulorũ & planorum & sphæralium incidit usus: quæ res iam pridem Georgio quoq; in primis sex libris crebro occurrens, animum induxit triangulorum artem conscribere. Verum ut epitomati finem, ita triangulis dare initium Deus ipse uetuit, quo nunc aspirante orbitam uiri doctissimi quoad potero sectabor: eo quidem libentius, quo doctrinã hanc plerisq; placituram amicis arbitror, quorum quidem inseruire cõmodis bonam felicitatis meæ partem existimo: eos autem, ut uirtus ipsa monet, gratis amplexibus munus illud susceptum ire non dubito, siquidẽ ad alia demũ altiora calcar addere pergũt. Si præterea magnis & scitu iucũdissimis rebus studere uelis, quisquis siderũ motus admiraris, hæc triangulorum theoremata in primis legenda sunt: quippe quorũ disciplina omnibus Astronomicis, nonnullisq; Geometricis quæsitis ianuam pandit. Quemadmodum enim cæteras figuras inuicem transmutandas ad triangulum usq; resolui oportet, ita reliquæ Astronomorũ quæstiones hisce nostris egebunt libellis. Reuera planetarum æquatiões numerare, ipsasq; in tabulis collocare, sed & eclipsibus luminariũ satisfacere, quãtæq; reliqs quinq; erraticis latitudines debeãtur, nosse uolenti prior cõsulendus uenit liber. Qui demũ in qualibet regione & ascensiones & arcus diurnos, deinde angulos sphærales eclipsi solari necessarios, mediationem cœli ac orꝰ obliquũ stellis fixis euenire solitum: postremo omnia quæ per figuras sectoris non sine gra-

ui ſudore paſſim exquiruntur, breuiter & q̄p facillimū aſſequi cupiet, ex poſteriore libello comparabit auxilium. Quid memorem ſtellarū à terra uarias menſuratuq; incredibiles remotiones atq; corpulentias, orbiumq; ſuorū ſpiſſitudines? quos limites corporibus denſis reſoluti uapores tranſilire non auſint: groſſicies inſuper Cometæ quandoli bet apparentis, eiusq; à terra elongatio, nunquid nō ſubtile uolet ſcru tinium? His & mille aliis eiuſcemodi rebus hæc triangulorū præcepta iter monſtrabunt accurātiſſimū, ſi prius obſeruationibus motuū atq; aliis primordijs parumper exercearis. Quod ſi in tanta rerū ſciendarū copia, pleraq; dictu ambigua, aut factu forſitā ardua, lectoris noui de terreant animū, haud extemplo deſperandum, digna etenim talibus medela obiectabit, ubi theoremate q̄libet tranſcurſo, ad numeros deſcenderis exemplares. Ad hæc demū accedit tabulæ ſinuū non minus utilis q̄p noua compilatio, quæ abſq; faſtidio numerorum frangendo rū aut fractorum ad integros prolixa reductione per ſinū arcus ſuos ex arcuq; ſinū offeret, præter cæteras eius generis tabulas id quidē faci litatis habens, q̄p per ſinguła minuta expanditur: quantūq; uni ſecūdo in quolibet tabulæ reſpondeat loco, diſcernitur: id autem certitudinis q̄p ſinus totus in ea ſex milia miliū particularū conſtituit. Interdū uero primos duos quorumlibet numerorum characteres negligere nō dabitur uicio, ſi exactiſſimam operis præciſionē parui faciemus, quē admodum canonibus ſuis cautum eſt. Quo tandem fieri oportet, ut quæ cæteri longis ſcrutantur ambagibus, breui admodum nobis & iu cunda inueſtigatione conſequi liceat. Hoc igitur ô pater optime, clien tuli tui munus aſpernari nolis, paucula q̄uis membrana contextū, plu rimis tamen atq; excelſis rebus ſolenne fundamentū: Radicē ſcalæ ad ſidera ducentis haud iniuria dixerim: ubi quidem immodeſti aliquid ſi forte offenderis, iure tuo reſecabitur licet: ſi uero quicq; egregij autoritas tua ſummaq; huiuſcemodi ſtudiorū peritia confirmandū duxerit, tuo nomini conſecratū eſto, qui quemadmodum durā hac tempeſtate Chriſtianæ ſalutis accepiſti prouinciā, ita murmura ſua Philoſophi moderni te imperatore miſſa facient. iamdudū enim quaſi cœlis errantibus, ſideribusq; orbitas ſuas oblitis perculſi, ſpectatiſſimū Philoſophiæ genus ſocordia præteriere. Perge igitur ut cœpiſti feliciter, ô mundi decus, terrenam prius compeſcere turbam, dehinc ſuo cœleſtia lumina reducas itineri: ne ut antehac cultores deludāt ſuos, quo tandē immortali poſteris gloria nimirū celebraberis. Vale.

De tri-

DE TRIANGVLIS

LIBER PRIMVS.

DIFFINITIONES.

COgnita uocabitur quantitas, quam mensura famosa, aut pro libito sumpta secundum numerum metitur notum. Quantitas mensurare dicetur aliã quantitatem, quæ in alia continetur secundũ numerum notum, aut quæ in alia quantitate quoties unitas in numero noto reperitur. Numerus autem notus habebitur, dũ inter eius unitates discretionem ponit intellectus. Proportionem datam appellabimus, quando aut denominatio sua data est, aut ipsa uel sibi æqualis proportio terminos habet cognitos. Proportiones æquales sunt, quibus una communis est denominatio. Quantitatum altera ad alterã data dicitur, dum mensura per quam altera earũ nota est, & reliquam notam efficit. Quantitates quotlibet inter se datas appellabo, quas una communis mensura notas reddit. Differentia quantitatum inæqualium uocatur portio maioris, qua minorem superat. Costa quadrati est linea recta, ex cuius in se ductione quadratum ipsum nascitur. Secundum quantitatem lineæ circulus quilibet describitur, dum semidiameter eius ipsi lineæ æqualis statuitur. Arcus est pars circumferentiæ circuli. Linea uero recta sibi conterminalis corda sua uocãri solet. Arcu & corda sua dimidiatis medietatem cordæ dimidij arcus sinum rectum nuncupabimus. Complementum arcus cuiuslibet dicitur, quæ sibi & quadranti interest differentia. Complementum autem anguli differentia ipsius ad angulum rectum diffinitur. Si quamlibet terminalem trianguli lineam basim intellexeris, duas reliquas situato nomine latera uocari licebit. In triangulo tamen æquicrurio latera dicimus duas æquales lineas, & tertiam reliquam basim. Sed & in omni triangulo linea quæ perpendiculare sustentat, basis uulgo geometrarum nuncupari solet. Triangulus æquilaterus dicitur, quem tres æquales claudunt lineæ. Aequicrurius, cuius duntaxat duæ æquales sunt lineæ terminales. Varius aũt triangulus, qui tres inæquales habet lineas. Casus perpendicularis uocatur portio basis, perpendiculari & alterutro laterum intercepta. Multiplicatio numeri per numerum est cuiusdam numeri, in quo multiplicatus continetur, quoties unitas in multiplicante procreatio. Diuisio autem numeri per numerum fit, quando numerus elicitur, in quo unitas quoties diuisor in ipso diuiso reperitur.

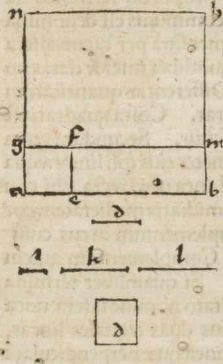
Commu

Communes animi conceptiones.

AEquales quantitates æqualiter mensurare. In duabus quoq; autquotlibet æquis quantitatibus mensuram eandem æqualiter contineri. Vnitatis ad quemlibet numerum, & econtra, datam esse proportionem. Omnis numeri partem esse unitatem ab ipso denominatam. Si à duabus quantitatibus inæqualibus æqualia aut idem commune abstuleris, relictis inter se atq; totis eandem haberi differentiam. Et si ex æqualibus quantitatibus inæquales portiones secueris, relictas & desectas alternatim æquales sortiri excessus. Omnem proportionem datam in numeris reperiri.

THEOREMA I.

Omnis datæ lineæ quadratum, erit cognitum.



Ex data linea a b quadratū describatur a h, quod dico cognitū iri. Mensura em, p quā ipsa a b nota habet fit linea d, cui ex duabus costis quadrati a h, q̄ sint a b & a n, abscindantur duæ æquales lineæ a e & a g, producatur q; g m quidem æquedistans lineæ a b & e f æquedistans ipsi a n, erit itaq; superficies a f quadrata per 29. & 34. primi elementoꝝ Euclidis. cūq; a b sit nota per mensurā linealē d aut ꝯ e sibi æqualē, sit k numerus secundū quē d mēsura uel a e mēsurat lineā a b. & l numerus alius ad quem se habeat k, sicut unitas ad ipsum numerum, eritq; numerus l quadratus per octauam noni, cuius radix quadrata per uigesimam septimi numerus k declarabitur. Quoniam uero a b nota ponitur per mensuram d, aut a e sibi æqualem secundū numerum k, erit a e in a b quoties unitas in k numero per diffinitionem, quare proportio a e ad a b est, sicut unitatis ad k numerū Vt autem a e ad a b, ita per primam sexti quadratum a f ad paralellogramū a m. quadrati ergo a f ad paralellogramum a m, & unitatis ad k numerum eadē est proportio. item per 34. primi b m æqualis est a g, quæ æquatur utriq; linearum a e & d. Proportio igitur b m ad b h costarum quadrati a h est ut a e ad a b, uel a f ad a m, per primam autem sexti b m ad b h est ut paralellogramum a m ad quadratū a h. quare paralellogramū a m ad quadratū a h, pportionē habebit eam quam quadratum a f ad ipsum paralellogramum a m. Erat autem a f ad a m sicut unitatis ad k numerum: quare & a m ad a h erit ut unitatis ad k numerum, & ideo ut k numeri ad l numerum. Per æquam igitur proportionalitatem a f ad a h ut unitatis ad l numerum. Ex diffinitione itaq; a f quadratum æquale quadrato mensuræ famosæ d mensurabit quadratum a h lineæ a b secundum numerum l. & ideo notum habebitur quadratum a h, quod erat demonstrandum. ¶ Opus breuissimum. Numerus secundum quem nota est linea, in se multiplicetur, & productus erit numerus secundum quem quadratum eius notum habebitur. Vt si a e siue d mensura fuerit in a b secundum numerum 5. multiplicatis 5 in se, producuntur 25. quadratum igitur a f in quadrato a h secundum numerum 25. reperitur, & similiter in reliquis.

Quadra

II.

Quadrati noti costa non ignorabitur.

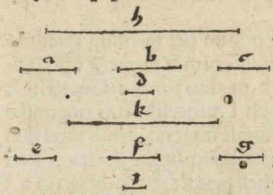
In figuratione superiori quadratū a h statuatur notum per mensurā quadratam d, dico q costa eius a b nota ueniet. Inter unitatē enim & numerū 1, secundum quem mensura quadrata d est in quadrato a h, medius proportionalis sit k numerus, quem constat esse radicem quadratā numeri 1, processus autē præmissæ docuit parallelogrammū a m esse medium proportionale inter quadratū inter duo quadrata: a f quidem mensurans, & a h mensuratum. Cūq; sit proportio a f ad a h, sicut unitatis ad 1 numerum, id enim ex hypothesi pendet; erit proportio a f quadrati ad a m parallelogrammū, tanq; unitatis ad k numerū, quoniam utrāq; harum ꝓportionum mediętas est suæ totius, sed quadrati a f ad parallelogrammum a m proportio est, ut lineæ a e ad lineam a b per primā sextī, quare proportio a e, & ideo lineæ d ad a b, sicut unitatis ad k numerum. Vnitas igitur in k numero quoties d linealis mensura in costa a b reperitur, unitas autē in k est secundū ipsummet k numerū. Omnis enim numeri pars est unitas ab ipso denominata, quare & mensura linealis d continebitur in costa a b secundum numerum k. ex diffinitione igitur costam a b notam effecimus, quod expectabatur ostendendum. Tenent autē hæc omnia, dum 1 numerus secundū quem mēsuramus quadratum ꝓpositum, quadratus occurret, tunc enim reperibilis est medius proportionalis inter eum & unitatem: q̄ si numerus 1 non quadratus fuerit, nullus erit medius proportionalis inter eum & unitatem, neq; unq; costa quadrati nota habebitur, stando in terminis quemadmodū diffiniti sunt. Cum autē sæpenumero accidat numeros secundū quos quadrata nostra metimur esse non quadratos, ne prorsus ignoremus propinquū ueritati (ut sunt scibilia humana) laxius posthac utemur uocabulo quantitatis notæ, cū; initio diffiniemus. Quantitatem igit oēm quæ aut nota præcise fuerit, aut notæ quātitati fermē æqualis, uniuoce notam appellabimus. pulchrius eqdē arbitror scire propinquū ueritati, cū; ueritatem ipsam penitus neglígere: non modo enim contingere metam, uerumetiā propinque accedere uirtuti dabitur. Non libuit autē hoc pacto superius diffinire quantitatē notam per præcisum & ꝓpinquum, ne suspecta lectori diffinitio nostra redderetur, fluctuante uocabulo propinqui id agente: nam etsi præcisum pro uero ponere soleamus, ꝓpinquum tamen ueritati uix diffinitionem lectori satis facturam accipiet. Ad rem ipsam demum redeundo, quoties numerus occurret non quadratus, siue integer, siue fractus fuerit, accipiemus loco eius numerum quadratum ipsi ut libet cū; ꝓpinquissimum, siue integer, siue fractus fuerit, inter quem & unitatē medium ꝓportionalem eliciemus, & procedendo ut supra notam concludemus costam quadrati, quod mensuratur secundum numerum quadratum pro libito acceptum. Quemadmodū autem numerus non quadratus noster, numero quadrato assum pto propinquus est, ita & costa quadrati nostri costæ alterius quadrati præcise cognitæ propinqua, & ideo nota habebitur. ✓ Operatio facillima. Extrahe radicē numeri secundum quem mensuratur quadratum ꝓpositum: si quadratus fuerit numerus huiusmodi, aut radicem numeri quadrati sibi propinqui, si non quadratus occurret, ipsa enim radix elicita quadrati tui costam notificabit.

Quantitas nota laxius definitur, & magis usitata.

III.

Si quotlibet quantitates inter se datæ fuerint, aggregatū ex eis notum habebitur.

Tres quantitates a b c, aut quotlibet inter se datæ sint, quarum aggregatum sit h, dico q̃ ipsum h aggregatum fiet notum. Quoniam enim inter se datæ sunt

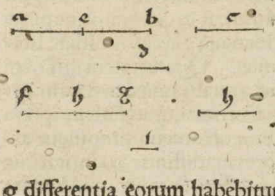


quantitates illæ, mẽsurabit eas communiter una quantitas quæ sit d, mensuret igit̃ quantitatem a quidem secundum numerum e, & b secundum numerum f: quantitatẽ aũtem c secundum numerum g, ex his tribus numeris coaceruatis resultet̃ numerus k. Cum igitur sit d in a, quoties unitas in e numero per diffinitionem quantitatis notæ, erit ꝓportio a ad d mensuram, sicut e numerum ad unitatẽ, similiter erit ꝓportio b ad d tanc̃ numeri f ad unitatem, & c ad d ut g ad unitatem: quare per. 24. quinti bis assumptam proportio aggregati ex tribus quantitatibus a b c, quod est h ad d mensuram, erit ut aggregati ex tribus numeris e f g, qui est k ad unitatem, unitas ergo in k numero, quoties d mensura in aggregato h continebunt, diffinitio itaq; quantitatis notæ concludet propositum.

IIII.

Duarum inæqualium inter se datarum quantitatum, differentiam cognitum iri.

Sint duæ quantitates inter se datæ, a b quidem maior, & c minor, quarũ differentia sit a e, quam prædico futuram notam. Communis enim mẽsura ambas metiens datas quantitates̃ sit d, quæ mẽsuret quãtitatem a b quidem secundum numerum f g, &



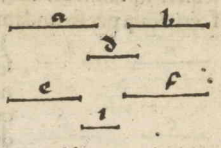
quantitatem c secundum numerum h, erit itaq; ꝓportio a b ad d sicut numeri f g ad unitatẽ, d autem ad b c sicut unitatis ad h, per æquã igit̃ a b ad c sicut f g ad h. Quemadmodum ergo a b maior est c quantitate, ita f g maior est h numero, separato q̃ numero k g æquali ipsi h, ex f g differentia eorum habebitur f k, & erit diuisim proportio a e ad e b, siue ad c sicut f k ad k g siue ad h. Quantitas autem c ad d mensuram, ut h ad unitatem. per æquam igitur a e ad d sicut f k ad unitatem, & ideo d mensura in a e differentia, quoties unitas in f k numero continebitur: quare per diffinitionem a e differentia nota redditur, quod erat deducendum. Operaberis autem hoc pacto. Duorum numerorum secundum quos mensurantur quantitates datæ, minorem ex maiore demas, relictus enim numerus cum mẽsura cõmuni notam efficiet differentiam inter se datarum quantitatũ. Qd̃ si huiusmodi duo numeri in unitate sola differant, differentia ipsarum quantitatum mensuræ communi reperietur æqualis, modus autem id demonstrandi à pristino non discrepabit.

V.

Omnes duæ inter se datæ quantitates proportionem habent eam, quam duo numeri secundum quos ipsæ mensurantur, unde manifestum proclamabimus, omnem proportionem datam in numeris reperiri.

Sint duæ quantitates a & b inter se datæ, quas ex diffinitione cõmunis quantitas

titas d mensuret a quidem secundum e numerũ, b uero secundum f, dico ꝙ proportio a ad b est sicut proportio numeri e ad numerũ f. quoniam enim d mensurat a secundum e numerũ, erit per diffinitionem d in a quoties unitas in e numero, & ideo a ad d, proportio tanꝯ e ad unitatem. Item d in b quoties unitas in f numero reperitur, d mensurante b secundum f numerum, quare proportio d ad b sicut unitatis ad f numerum. per æquam igitur a quantitatis ad b quantitatem, tanꝯ numerũ e ad numerum f erit, proportio, quod libuit concludere.

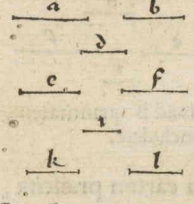


VI.

Proportio duarum quantitatum data, ex altera earum præscita, reliquã suscitabit cognitam.

Altera duarum quantitatum a & b notam ad inuicem proportionem habentium, sit cognita: dico, ꝙ & reliqua nota habitur. Aut enim, proportio illa data est per denominationem, aut per sibi æqualem prõportionem. Sit primo data per denominationem, ponaturꝙ numerus c denominator huiusmodi prõportionis, cunꝙ altera duarum quantitatũ nota subijciatur, sit antecedens a nota per mensuram d secundum numerũ e, quo diuiso per numerum c denominatorẽ proportionis, exeat numerus f, erit itaꝙ per diffinitionẽ diuisionis c in e, quoties unitas in f numero, & ideo, proportio c ad e sicut unitatis ad f, permutatimꝙ c ad unitatem sicut e ad f. Proportionem aũt c ad unitatem denominat ipsemet numerus c. denominabit igitur & proportionem e ad f. cunꝙ denominet etiam proportionẽ a ad b, erit per diffinitionem æqualium proportionũ a ad b sicut e ad f., & conuersim b ad a sicut f ad e, sed a ad d mensuram sicut e numerus ad unitatem. per æquam igitur, b quantitas ad d mensuram sicut f ad unitatem: quare d mensura in b quantitate, quoties unitas in f numero continebitur, ex diffinitione ergo b quantitas relicta nota redditur. Qd si b consequentẽ attuleris datam, sit hoc p d mensuram secundum numerũ f, qui multiplicatus per numerum c denominatorem proportionis, producat numerũ e, secundũ quem oportebit esse notã quantitatem antecedentẽ a, erit enim per diffinitionẽ multiplicationis f in e, quoties unitas in c: quare proportio e ad f sicut c ad unitatem. Proportionis autẽ c ad unitatem denominator est ipsemet numerus c, omnis enim numeri pars est unitas ab ipso denominata, quare per conuersionẽ diffinitionis c numerus denominabit proportionẽ e ad f, denominabat aũt & proportionem a ad b, æquales igit ex diffinitione sunt proportiones a ad b & e ad f, sed b consequentis ad d mensuram sicut numeri f ad unitatẽ, ꝙ b nota supponatur per d mensuram secundum numerũ f, per æquam ergo fiet proportio a ad d mensuram sicut numeri e ad unitatem. a itaꝙ continebit d mensuram, quoties e numerus unitatẽ, & ideo per diffinitionem notæ quantitatis concludemus propositum. ¶ Si autem data sit, proportio quãtitatũ per sibi æqualẽ, illa scilicet sibi æqualis terminos habebit cognitos, qui aut erunt numeri, aut ex præmissa proportionẽ habebunt adinuicem, sicut numeri, qui sint k & l, ita ꝙ a ad b, proportio sit tanꝯ k numeri antecedentis ad l numerum consequentem. Positaꝙ primum quantitate antecedente a nota per mensuram d secundũ numerum e, multiplicetur e per l, & productus

ſcilicet m numerus diuidatur per k numerum antecedentem, ut exeat numerus f, erit itaq; per ſecundam partem uigeſimæ ſeptimi proportio e ad f ſicut k ad l, & conuerſim f ad e ſicut l ad k, & ideo ſicut b ad a, ſed e ad unitatem ſicut a ad d menſuram ex diffinitione notæ quantitatis. per æquam igitur f ad unitatem ſicut b quantitas ad d menſuram: quare b quantitas continebit d menſuram quoties f numerus unitatem. per diffinitionem ergo quantitatis notæ inferemus propoſitum. Si demum b quantitas conſequens ponatur nota, ſit hoc per menſuram d ſecundū numerum f, ductoq; f in k numerum, productoq; diuiſo per l, exeat numerus e, eritq; per ſecundam partem uigeſimæ quinti ut ſupra: proportio l ad k ſicut f ad e, & conuerſim k ad l ſicut e ad f. ſed erat k ad l ſicut a ad b: quare e ad f ſicut a ad b, f autem ad unitatem ſicut b ad d menſuram, quoniã d menſurat b ſecundū numerū f, per æquam igitur a ad d menſuram ſicut numerus e notus ad unitatem, erit itaq; d in a, quoties unitas in e numero noto, diffinitio ergo quantitatis notæ quod reliquū eſt cõcludet. ¶ Opus habeto bimembre. Si proportio data offeratur per denominationẽ, & antecedens quantitas fuerit nota, diuide numerum quantitatis antecedentis per numerū denominatorẽ, pportionis, & exibit numerus quantitatis conſequentis. Si aũt conſequentem habeas quantitatem notã, multiplica numerum eius per numerū denominatorẽ proportionis, & producetur numerus quantitatis antecedentis. In exemplo: Si fuerit a .24. proportio autem eius ad b quantitatẽ tripla, ecce denominatorẽ proportionis 3. per quem diuido 24. & exibunt 8. pro quantitate conſequente b. Si autem b ſit 8., pportio uero a ad b quintupla, multiplicabo 8. per 5. denominatorẽ proportionis, & producent 40. pro a quantitate. Qd' ſi proportio data fuerit per ſibi æqualem proportionẽ, & antecedens quantitas fuerit data, multiplicabis numerū quantitatis antecedentis per numerum conſequentẽ, & productum inde diuides per numerū antecedentem, exibit enim numerus ſecundum quẽ quantitas conſequens nota habebitur. Si ue. o' quantitas conſequens data fuerit, numerū eius per numerū antecedentem multiplica, & productū per numerum conſequentẽ partiaris, qui enim exibit numerus, quantitatem antecedentẽ notificabit. Vt ſi a fuerit 8. & proportio eius ad b ſicut 4. ad 5. multiplicabo 8. per 5. producuntur 40. quæ diuidam per 4. exibunt 10. pro quantitate b. Sed pportio a ad b ſit, ut 3 ad 7, ſitq; quantitas b 28. multiplicabo 28 per 3, producendo 84. quæ diuido per 7, exeunt 12, erit igitur a quãtitas 12. Ita in cæteris.



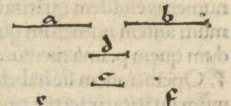
VII.

Si fuerint duæ quantitates inter ſe datæ, quarum altera per menſuram nouam ſit cognita, & reliqua per eandem nouam menſuram nota ueniet.

Vt ſermo tam breuior q; lucidior appareat, ueterem diffiniuimus menſuram eam, per quã ambæ quantitates cõmuniter notæ ſunt, nouam uero, per quam alteram earum tantum. Hæc aũtẽ à præmiſſa in hoc diſcrepat, q; illa alteram duntaxat quantitatũ ſupponit datam, hæc uero ambas quantitates ſubijcit notas per unam menſuram cõmunem, & inſuper alteram earum per menſuram aliam. Sint igitur duæ quantitates a & b datæ per menſuram cõmunem d, quã dicemus ueterem,

altera

altera insuper earum (uerbi gratia) a data sit per mensuram nouam c: dico, q & b quantitas per eandem c mensurã nota prosiliet. Metiatur enim d mensura duas quantitates subiectas a & b secundũ numeros e & f, erit itaq; per quintã huius proportio duarum quantitatum a & b, tanq; duorum numerorũ notorum e & f, quæ cum sit nota, erit etiam proportio quantitatum a & b nota. Est autem a quantitas data per mẽsurã c, quare per præmissam & b quantitas per eanden notificabitur mensuram, quod uolebamus inferre. ¶ Operatio huius habita propor

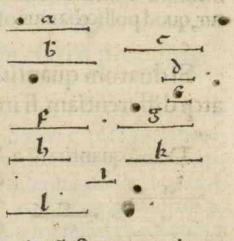


tione duarum quantitatum propositarum in terminis notis, ab opere præcedentis non dissonabit.

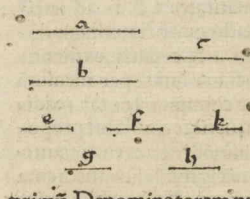
VIII.

Si utraq; duarum quantitatum ad tertiam data fuerit, ipsæ inter se datæ habebuntur.

Duarum quantitatũ a & b utraq; ad tertiam quantitatẽ c data intelligat: Dico, q ipsæ inter se reddentur notæ. Quoniã enim utraq; quantitatũ a & b ad quantitatẽ c data est, mensurabit eas cõmuniter una mensura, quæ sit d, similiter duæ quantitates b & c, mensuram habebunt unam cõmunem, quæ sit e. Si itaq; d & e mensuræ æquales fuerint, eas tanq; unam nõ iniuria reputabimus, sicq; duas quantitates a & b, quantitas una cõmunis metietur: unamquãq; secundũ numerum suum, per diffinitionẽ ergo inter se datæ comprobantur. Si uero duæ mẽsuræ d & e diuersas sibi obtulerint, duæ quantitates dictæ, etsi datæ habeantur secorsum, inter se tamen nondũ datæ sunt. Mensuret igitur d quantitates a & c secundum numeros f & g, mensura autẽ e duas quantitates b & c secundũ numeros h & k. Placeat itaq; duas quantitates a & b inter se notas efficere per mensuram d, quam pro libito primã e uero secundam nuncupabimus: similiter q; a quantitatem primam uocare licebit, b autem secundam, q hanc cum c quantitate prima mensura, illam uero secunda metiatur, hoc enim pacto sermonis uitabitur cõfusio. Reperiatur itaq; numerus l, ad quem se habeat g numerus sicut k ad h, qd facile fiet, si ad uigesimam septimi recurres. Cumq; sit proportio h ad k, sicut quantitatis b secundæ ad quantitatem e tertiam, ex quinta huius, erit & l ad g tanq; b ad c, sed g numerus ad unitatẽ, sicut quantitas c ad mensuram d primam, cum c quantitas nota sit per mensuram d secundũ numerum g. Per æquam igitur l numerus ad unitatem, sicut b quantitas ad d mẽsuram: quare b continebit d mensuram quoties l numerus unitatem, & ideo per diffinitionem quantitatis notæ, b quantitas nota habetur per mensuram d, quã continet secundum numerum l. erat autem & quantitas a per eandem mensurã nota. ex diffinitione igitur inter se datarum quãtitatum constabit a & b inter se datas esse. Qd si idem per mensurã e consequi libeat, sicut ipsam e mensurã primam, ita & b quãtitatem primã dicemus, ad numerum autem l se habeat k numerus, tanq; g ad f, reliqua ut antehac procedent. Vniuersaliter enim mensura, per quã duas quantitates ad tertiã datas inter se notas efficere conamur, prima uocabitur, reliqua uero secũda. Similem deniq; ordinem duabus quãtitatibus dictis



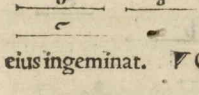
proportioni denominatoris primi ad denominatorem secundum, quod pro corollario non inutili reputabimus. Quòd si a & b quantitatũ ad c proportiones datæ offerantur per sibi æquales ꝓportiones, oportebit eas in numeris reperiri ꝑ diffinitionem proportionis datæ & quintã huius. Sit itaq; ꝓportio a ad c sicut numeri e ad numerũ f, quãtitatis uero b ad c sicut numeri g ad numerũ h, multiplicatoq; f per g, & producto diuiso per numerũ h, exeat numerus k, eritq; per secundã partem uigesimæ septimi ꝓportio h ad g, sicut f ad k. Cum igitur e numerus ad f se habeat, sicut a quãtitas ad c quantitatem, f autem ad k sicut h ad g, & ideo conuersim argumentando, sicut c quantitas ad b quãtitatem, erit per æquam proportio e numeri ad k numerum, sicut a quantitatis ad b quãtitatem, ꝓportio autem e numeri noti ad k numerum notũ data est. quare & proportio a quantitatis ad b quãtitatem cognita elicit̃, ꝙd libuit explanare. ☞ Opus primũ. Denominatorem primæ proportionis per denominatorem proportionis secundæ partiaris, exibit enim denominator ꝓportionis quã habẽt dicti denominatores, primus uidelicet ad secundũ, quæ etiam proportioni primæ quãtitatis ad secundã communis existit. Aut denominatores ipsos serua pro notitia proportionis, satis enim nouisti primæ quantitatis ad secundã, si eam in numeris notis reperisti. Vt si ꝓportio a ad b fuerit quintupla, b uero ad eandẽ c quãtitatem septupla: cum primæ proportionis denominator sit 5, secundæ uero 7, erit proportio a ad b sicut 5 ad 7. ☞ Opus aliud. Numerũ consequentem primæ proportionis duc in numerũ antecedentem secundæ proportionis, & productũ diuide per numerum consequentem secundæ proportionis, exibit enim numerus ad quẽ se habet numerus antecedens primæ proportionis, sicut prima quantitas ad secundã. Vt si a ad c fuerit proportio sicut 5 ad 7. b autem ad c sicut 3 ad 8. multiplicabo 7 per 3. producentur 21. quæ diuido per 8, exeunt $2\frac{5}{8}$. igitur habebit se ad b sicut 5 ad $2\frac{5}{8}$.



XIII.

Si quotlibet quantitatũ ad aliam datæ fuerint proportiones, omnium duarum ex eis proportio manifestabitur.

Tres quantitates a b c, aut quotlibet plures ad quantitatem aliã d proportiones habeant cognitas. Dico, ꝙ quælibet duæ ipsarum proportiones sortientur datas. Placeat enim primum proportionem a ad b reddere notã. Cum itaq; utriusq; quãtitatum a & b ad quãtitatem d proportio sit nota, earum inter se proportio non ignorabitur ex præmissa. Similiter de omnibus duabus reliquis prædicabimus. Nihil enim alieni præsens addit præmissæ, nisi ꝙ processum eius ingeminat. ☞ Opus ꝙq; huius opus illius est, quoties oportuerit repetitũ.

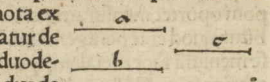


XIIII.

Si utriusq; duarum quantitatum ad tertiam data fuerit proportio, fueritq; altera earum nota, reliqua quoq; notam se offeret.

Vtriusq; duarum quãtitatũ a & b ad quãtitatem c data sit proportio, sitq; a quantitas nota. Dico, ꝙ & b quãtitatem notam fieri oportet. Cũ enim utraq; earum

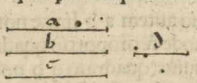
earum ad c datam habeat proportionem, proportio ipsarū inter se per 12. huius nota ueniet. quare per sextam huius e quantitate nota existente, & b quātitas nota emerget, quod expectabatur declarandum. ☞ Operatio aūt huius ex operibus duodecimæ & sextæ huius commiscetur. Nam postēa ex duodecima huius proportionem huiusmodi quantitatum reperies, per sextam tandem, quæ prius ignota erat, notam efficies quantitatem.



XV.

Si quotlibet quantitates ad aliam quandam proportiones habuerint datas, quarū una quælibet sit nota, reliquæ omnes notæ prosiliēt.

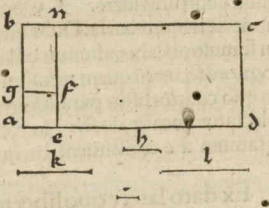
Sint tres aut quotlibet quantitates a b c, quarum unaquæq; ad c quantitatem proportionem habeat datam: sitq; una earum quæcunq; (uerbi gratia) a data. Dico, q reliquæ omnes notæ occurrent. Erit enim per 13. huius proportio a quantitatis ad singulas alias data, quare per sextam huius a quantitate nota existente, singulæ reliquæ innotescent, quod erat concludendū. ☞ Operationem ex tredecima & sexta huius facile comparabis.



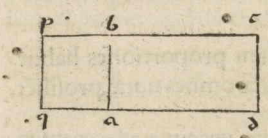
XVI.

Quod sub duabus inter se datis rectis lineis continetur, parallelogramum rectangulum latere non poterit.

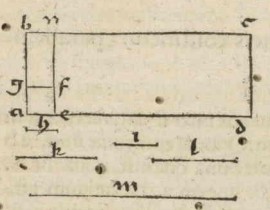
Sit parallelogrammū rectangulum a b c d, duabus inter se datis contentum lineis a b & a d. Dico, q ipsum prodibit cognitum. Quoniā enim duæ lineæ a b & a d inter se notæ sunt, mensurabit eas communiter una quantitas quæ sit h. mensuret itaq; lineam a b secundum numerum k, & lineam a d secundum numerū l, & abscindant ex duobus lateribus pallelogrami ꝓpositi: duæ lineæ a g & a e, quarum utraq; mensuræ communi h æqualis existat, productis lineis e n q demq; æquedistante ipsi a b & g f, æquedistante lateri a d, erit q; per 29. 34. primi & diffinitionem quadrati superficies a f quadrata. cunq; h siue a g sibi æqualis mensuret latus a b secundum numerum k, erit a g in a b quoties unitas in k, & ideo proportio a g ad a b, sicut unitatis ad k numerum, quare ꝑ primā sexti proportio quadratelli a f ad parallegrammum a n, sicut unitatis ad k numerum. Vnitatis autem ad k numerum proportio data est per animi conceptionem, quare & ꝓportio quadratelli a f ad parallelogrammum a n nota perhibebitur. Item quoniā a e æqualis ipsi h mensurat latus a d secundum numerū l, erit a e in a d, quoties unitas in l numero. quare proportio a d ad a e est ut numeri l ad unitatem. proportio autem a d ad a e per primā sexti est tanq; parallelogrāmi a c ad parallelogrammum a n. parallelogrāmum ergo a c ad parallelogrāmum a n sicut numerus ad unitatem. sed numerus l ad unitatem proportionem habet datam ex communi animi conceptione, unde & proportio a c ad a n scita ueniet. Iam igitur duarum quantitatum superficialium a f & a c, utraq; ad parallelogramū a n proportionem habet datam, quare per 12. huius earum inter se constabit proportio.



& quoniam quantitas a f nota est: in omnibus ncp mensurationibus notam supponi oportet mensuram, per sextam huius parallelogramū a c notum e nunciabitur, quod erat peragendum. Constat autem hoc in ꝓpositō quadratellum a f esse mensurā superficialem, ꝙ costam eius a e mensuræ lineali h æqualē initio statuerimus. ◤ Idem alio tramite consequemur. Prolongetur utraq; linearum c b & d a uersus sinistrā, donec duæ lineæ b p & a q sibi, & lineæ a b æquales ueni



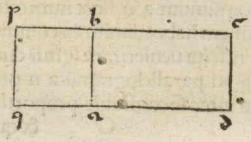
ent, continuatisq; terminis earum p & q, per lineam p q claudetur quadratum q b per 29. 33. primi, & diffinitionem quadrati, cuius cum hypothesis notā dederit costam a b, ipsum ꝙq; ꝓ primā huius notum habebitur. est autē ex prima sexti, ꝓportio quadrati q p ad parallelogramum a c, tanq; q a, siue a b ad a d. proportio autem a b lineæ notæ per hypothesim ad a d notam per diffinitionem data, unde & proportio quadrati q b ad parallelogramū a c data erit. per sextā igit huius (quadrato q b noto existente) ueritatem theorematis inferemus. ◤ Adhuc aliter & ad operationem aptius. Resumpta figuratione prima, numerus k in numerū l ductus, efficiat numerū l m. Cū itaq; ut supra memoratū est, proportio quadratelli a f ad parallelogramū a n est, sicut unitatis ad k numerum. a n autē ad a c sicut unitatis ad l numerum. superius enim erat a c ad a n tanq; numeri l ad unitatem, unitatis demū ad l numerum sicut numeri k ad numerū m. est enim k in m, quoties unitas in l ex diffinitione multiplicationis. per æquā igit ꝓportionalitatem erit a f quadratelli ad a c parallelogramum, sicut unitatis ad m numerum. quare a f in a c, quoties unitas in m numero reperitur. ꝓ diffinitionem itaq; notæ quantitatis parallelogramum a c notum effecimus, in eo enim mensura superficialis a f continetur secundum numerum notum, qui est m quod libuit absoluere. ◤ Opus autem docebimus unicum, tametsi demonstratione freti simus uaria. Duos numeros duorum laterum parallelogrami notorum in se multiplicabis, alterum uidelicet in alterum, ꝓducetur enim numerus parallelogrami secundū quem mensurā superficialis, quadratū scilicet mensuræ linealis in ipso continebitur parallelogramo. Vt si latus a b 5, & latus a d 7, pedes cōplectatur lineales, ductis 5 in 7, creabuntur 35. tot igitur pedes quadrati parallelogramum a c constituent. Ita in cæteris operabere.



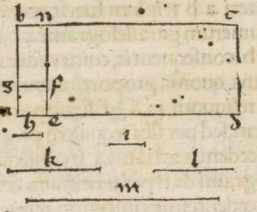
XVII.

Ex dato latere quolibet parallelogrami rectanguli cogniti, reliquū latus emerget notum.

Sit parallelogramum rectangulū a b c d cognitum, cuius etiam latus unū quodcunq; fuerit notum habeatur, sitq; (uerbi gratia) a b. Dico, ꝙ reliquū latus eius a d scitum erit. Eductis namq; lineis d a & c b ad puncta q & p, donec utraq; linearū a q & b p æquabitur lineæ a b datæ, complea tur quadratum q b protracta linea p q, erit itaq; per primā sexti, ꝓportio q b quadrati ad a c parallelogramum sicut lineæ q a ad lineā a d, est



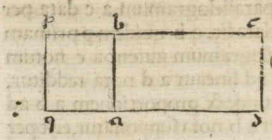
a d. est autem proportio quadrati q b ad ipsum parallelogramum a c data per diffinitionem, q utraq; superficierum q b & a c data sit. q b quidem p primam huius. est enim quadratum lineæ a b datæ, parallelogramum autem a c notum subiecit hypothesis. Proportio igitur & lineæ q a ad lineam a d nota redditur, sed q a & a b sunt costæ quadrati q b æquales, unde & proportionem a b ad a d notam esse oportet. cunq; altera illarum, scilicet a b nota supponatur, erit per sextam huius reliqua linea scilicet a d nota, sicq; reliquum parallelogrami latus a d notum exegimus, quod libuit attingere. ¶ Idem aliter & ad operationem accomodatius. Quoniã latus a b notũ supponit, mensuret ipsum h famosa quantitas secundum numerum k, sitq; utraq; linearum a g & a e ex parallelogrami nostri lateribus absumptarum æqualis mensuræ h, & ducatur e n quidẽ æquedistans lateri a b, g f uero lateri a d æquedistans, eritq; superficies a f quadrata per 29. & 34. primi & diffinitionem quadrati, quæ quidem superficies mensurabit parallelogramũ a c secundum numerũ notum, qui sit m. quoniã parallelogramũ supponitur cognitum, hunc numerum in postremo per numerum k partiamur, ut exeat l numerus. Quia itaq; proportio a b ad h, siue ad a g est, ut numeri k ad unitatem, h mensurante lineam a b secundũ k numerum: erit per primã sexti parallelogrami a n ad quadratellum a f, sicut numeri k ad unitatem. quadratelli autem a f ad parallelogramũ a c, sicut unitatis ad numerum m, q parallelogramũ ipsum quadratello mensuretur secundum numerũ m. quare per æquam proportio parallelogrami a n ad parallelogramum a c est, ut numeri k ad numerum m. est autem a n ad a c, tanq; a e siue h sibi æqualis ad lineã a d per primã sexti. Vnde & h ad a d est ut k numeri ad numerum m, sed k ad m sicut unitatis ad l numerum per diffinitionem diuisionis. quare proportio h ad lineã a d est, sicut unitatis ad l numerum. mensura igitur h in linea a d, quoties unitas in numero l continetur, quare linea a d nota concluditur, quoniã mensura h famosa continetur in ea secundum numerum l notum. reliquum ergo parallelogrami latus effecimus, cognitũ, quod intendebamus. ¶ Opus breue. Numerum parallelogrami noti in numerum lateris noti partiaris, & exibit numerus lateris reliqui quæsitus. Vt si parallelogramum a c offeratur 36. pedum superficiale, habens latus a b 4 pedum linealium, diuidã numerum 36 in numerum 4. & exibunt 9. Latus igitur reliquum a d, nouem pedes complectetur lineales.



XVIII.

Ex data proportione laterum parallelogrami rectanguli cogniti, utriusq; lateris pendebit noticia.

Sit parallelogramum rectangulum a b c d cognitum, cuius latera a b & a d proportionem habeant adinuicem notã. Dico, q utrunq; ipsorum notum habebitur. Resumpta enim prima figuratione præcedentis, erit per primã sexti proportio a c parallelogrami ad a p quadratum, sicut lineæ d a ad lineã a q. est autẽ proportio lineæ d a ad lineã a q data, q a q æqualis habeatur lineæ a b. quare & proportio parallelogrami a c ad quadratum a p nota redditur. cunq; notum subiecerimus parallelogramum a c, erit per sextã huius & quadratum a p

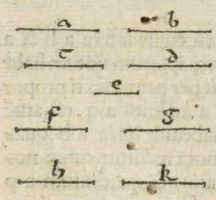


cognitum. inde quoq; per secundã huius cõsta sura a b non ignorabitur: quæ quidẽ est alterũ ex lateribus parallelogrami propositi. datã autem tradidit hypothesis proportionem laterum dicti parallelogrami. ex latere igitur a b iã cognito sexta huius, reliquum latus a d suscitabit notum. utrunq; ergo parallelogrami latus effecimus mensuratum, quod pollicebatur præsens theorema. ¶ Opus ita comparabis. Si proportio laterum data est per denominationem, diuide numerum parallelogrami per denominatorem proportionis, & exibit numerus quadrati lateris consequentis, cuius radix quadrata latus ipsum consequens notificabit, postea ad operationem sextæ huius aut præcedentis confugias, quæ reliquũ latus eliciet cognitum. Vt si parallelogramum a c contineat 48 quadratos pedes, latus autẽ a d lateri a b triplum fuerit, ecce denominatorem proportionis 3. per quem diuido numerum parallelogrami 48, & exeunt 16. numerus qui debetur quadrato lateris a b consequentis, cuius radix quadrata 4, latus a b notum faciet. 4 autem tripli cans, quoniã proportionem triplã elegimus: aut 48 diuisis per 4, exurget latus a d reliquum 12. Qd si proportio lateris ad latus data fuerit, non per denominationem, sed per sibi æqualem proportionem, ut si diceretur, proportio lateris a d antecedentis ad latus a b consequentis est, ut 5 ad 3: multiplicabis numerum paralle logrami dati per terminum consequentem, & productũ partieris in numerum antecedentem, exibit enim numerus assignandus quadrato lateris consequentis: cũ quo ut antehac procedendum erit. Vt si parallelogramũ a c fuerit 60. latus autem a d ad latus a b se habeat, ut 5 ad 3. multiplicabo 60 per 5. producũtur 180. quæ diuisa per 5, eliciunt 36. quadratum scilicet lateris a b, cuius radix quadrata 6, ipsum latus a b notificabit. reliqua autem per operationẽ præcedẽtis absoluent.

XIX.

Si quatuor quantitatum proportionalium tres quælibet datæ fuerint, & quarta reliqua innotescet.

Sint quatuor quãtitates a b c d proportionales, quarum tres notæ sint quæcunq;, dico, q; quarta reliqua notæ ueniet. Quãuis autẽ ipsa ignota quãtitas nunc primum, nunc secundum, interdũ uero reliqua soleat occupare locã, tamen ne operis uarietas, quæ necessario hanc mutationem consequitur, lectorẽ perturbet: placuit semper ignotæ quãtitati postremũ deputare locum. Præsens igitur theorema facile confirmabimus, si prius quo pacto quãtitas ignota, quocunq; nobis offeratur loco, postrema fiat docebimus. Constat autem huiusmodi quatuor quãtitatum proportionalitas ex duabus proportionibus, quarũ unius ambo termini sunt cogniti, & illã faciemus primã. secundæ autem proportionis unus duntaxat notus est terminus, qui si fuerit antecedens, iã ordinate sunt quatuor illæ quantitates, ut uolumus. habebit enim ignota quartum locum. Si uero consequens secundæ proportionis notum fuerit, conuertemus ambas proportiões, & trãsferetur ignota quãtitas ad postremũ locũ. Nunc ad confirmationem proportionis descendamus. Quatuor quãtitatum proportionaliũ a b c d, tres primæ sunt notæ secundum tres numeros f g & h, simili ordine positos

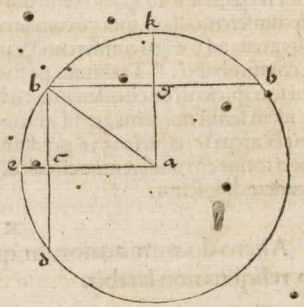


ne positos, ita ꝙ quãtitas tertia c, scilicet nota sit per mensuram e secundũ numerum h. reperiatur ꝙ numerus k, ad quem se habeat h, sicut f ad g. quod fiet, si productum ex h in g, per numerum f partiemur, quemadmodum ex uigesimæ septimi elementorũ trahitur. erit autem numerus k, secundũ quem nota habebit, postrema quãtitatũ ꝙ mensurã quidẽ e. Nã ex quinta huius, proportio a quãtitatis ad b erit, sicut numeri f ad numerũ g. sed a ad b sicut c ad d ex hypothesi, & f ad g sicut h ad k, quare c ad d sicut h ad K, & cõuersim d ad c tanꝯ k ad h, & c ad mensurã e, sicut h numerũ ad unitatẽ, ꝙ e mẽsuret c secundũ numerũ. h. p æquã igitur, proportio d quãtitatis postremæ ad e mensurã, tanꝯ numerũ k ad unitatem. est itaq; e mensura in d, quoties unitas in k numero. d ergo quãtitas nota redditur per mensurã e secundũ numerũ k, quod libuit explanare. ¶ Opus, multiplica numerum secundæ quãtitatis per numerum tertiæ, & productũ in numerum primæ quãtitatis divide, exibit enim numerus postremæ quãtitatis quæsitus. Vt si a fuerit 4. & b 9. c uero 12. multiplico 12 per 9, producãtur 108, quæ diuisa per 4, eliciunt 27 numerũ uidelicet quantitatis postremæ.

XX.

In omni triangulo rectangulo, si super uertice acuti anguli, secundũ quantitatem lateris maximi circulum descripseris, erit latus ipsum acutum, subtendens angulum sinus rectus conterminalis sibi arcus dictũ angulum respicientis: lateri autem tertio sinus complementi arcus dicti æqualis habebitur.

Sit triangulus rectanglus a b c, angulum c rectum habens, & a acutum, super cuius uertice a secundum quãtitatem lateris maximi a b, maximo scilicet angulo oppositi describatur circulus b e d, cuius circũferentiæ occurrat latus a c quoad satis est prolongatũ in e puncto. Dico quòd latus b c angulo b a c oppositum est sinus arcus b e dictum angulum subtendentis. Latus autem tertium, scilicet a c, æquale est sinui recto complementi arcus b e. Extendatur enim latus b c occurrendo circumferentiæ circuli in puncto d. à punctis autem a quidem centro circuli exeat semidiameter a k æquedistans lateri b c. & à puncto b corda b h æquedistans lateri a c. secabunt autem se necessario duæ lineæ b h & a k, angulis a b h & b a k acutis existentibus, quod fiat in puncto g. Quia itaq; semidiameter a e cordam b d secat orthogonaliter propter angulum a c b rectum, secabit & ipsam per æqualia ex tertij elementorũ. & arcum b d per æqualia ex 29. eiusdem. quemadmodum igitur tota linea b d per diffinitionem corda est arcus b d, ita medietas eius, linea scilicet b c est sinus dimidij arcus b e respicientis angulũ b a e siue b a c. quod asseruit prima pars theorematis nostri. Secundam deinceps partem ueram cõfiteberis, si prius per 34. primi angulum a g b rectum esse didiceris. semidiameter enim a K, & cordam b h, & arcũ eius ex suprà memoratis medijs per æqua scindet. quare per diffinitionem linea recta b g sinus erit arcus b K. Est autem linea b g æqualis lateri tri



teri trianguli a b c. per 34.primi, ꝙ ſupficies a g b c æquediſtãtibus contineat̃ lineis. angulus uero c a g, ſiue e a k rectus eſt per 29.primi, propter æquediſtantiam linearum b c ad a g, quare per ultimã ſexti arcus e k circumferentiæ ſuæ quadrãs probabitur. arcus itaq; b k complementum ipſius arcus b e diffinietur, cuius ſinus b g lateri a c æqualis nuperrime concludebatur. utranq; igitur proportionis partem ſatis oſtendiſſe uidemur.

XXI.

Omnem angulum rectum notum eſſe oportet.

Vnus enim rectus angulus ad quatuor rectos notã habet proportionem, ſumma autem quatuor rectorum nota eſt, cum gradus unus ſcilicet 360. pars quatuor rectorum: qua tanq; menſura famoſa utuntur uniuerſi Geometræ: ſecundũ numerum notum 360. contineatur in quatuor rectis. quare per ſextã huius & unus angulus rectus notus habebitur, quod erat lucubrãdum. Quarta autẽ pars ex 360 eſt 90. Iuſto igitur computo 90 gradus angulo recto uẽdicabimus. Miraberis forſitan, quo pacto diuerſi generis quãtitates menſura gradualis metiatur. Dicimus enim circumferentiã circuli uel arcum tot uel tot complecti gradus, item quatuor rectos angulos, uel alium angulum quemcunq; aliquot continere gradus. Quid igitur uocabulo gradus ſignificare uelimus, paucis habeto. Menſura famoſa arcuum eſt gradus circumferentialis ſcilicet 360. pars circumferentiæ circuli, menſura autem famoſa angulorum eſt gradus angularis, uidelicet 360. pars quatuor rectorum angulorum, id eſt, ſpacij plani, quod circa punctum quodlibet exiſtit. Imaginãdo enim duas ſemidiametros circuli ſuper puncto quocunq; tanq; centro deſcripti: gradum circumferentiæ circuli dicti intercipientes, angulus quem ipſe ſemidiametri ambiunt gradus uocabitur angularis, quoniã angulus ille 360. in quatuor rectis, ſiue toto ſpacio centrum circuli ambiente continetur: ſicut & gradus circumferentialis in tota circumferentia. huius enim anguli ad quator rectos, & illius arcus ad totã circumferentiã, eandem eſſe proportionem, ex ultima ſexti facile comprobabit̃. ¶ Trahimus poſtremo ex iam recitatis, ꝙ cuilibet angulo & arcui ſe reſpicienti de circũferentia circuli ſuper uertice ipſius anguli deſcripti, unus & idem ſeruit numerus. uerbi gratia, ſi angulum quemlibet 36 graduũ ſtatuimus, erit & arcus ſe reſpiciens 36 graduum, & econtra. quod quidem ex identitate numeri totius circumferentiæ circuli & quatuor rectorum, ultima ſexti ratiocinante pendere dinoſcitur.

XXII.

Altero duorum acutorum, quos habet triangulus rectangulus, dato, reliquus non latebit.

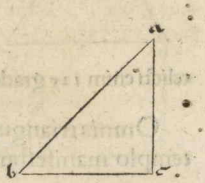
Duo enim acuti anguli, quos habet triangulus rectangulus, per 32. primi, ualent unum rectum, ꝙ tertius angulus ſit rectus, aggregatũ itaq; ex duobus dictis acutis angulis notum eſt, quoniã ex præmiſſa rectus angulus notus eſt, ſed & alter acutorũ ex hypotheſi datus eſt, quare per quartam huius reliquum cognoſcemus.

¶ Opus, numeri anguli acuti dati, ex numero unius recti minuas, & relinquetur quantitas alterius. Vt ſi angulus b fuerit 20, minuo 20 ex 90, relinquuntur 70. tantum igitur habebo angulum c reliquum.

Si duo

XXIII.

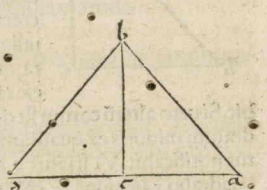
Si duo latera trianguli, rectum continentia angulum, fuerint æqualia, duo acuti anguli eis oppositi reddentur noti.



Duo latera a c, c b trianguli a b c rectanguli, rectum angulum c ambientia, sint æqualia. Dico, ꝙ uterꝙ angulorum b & c notus prodibit. Erunt enim per hypothesim & quintã primi duo anguli a & b æquales, cunꝙ per 32. primi ipsi ualeant unum rectum, angulo c recto existente, erit uterꝙ eorum medietas per 21 huius cognati, quare per 6. huius uterꝙ eorum notus habebitur, quod libuit explanare. ◤ Opus. Quantitatem anguli recti dimidiabis, & apparebit utriusꝙ angulorũ acutorum quãtitas. Verbi gratia. Recto angulo habente 90 gradus, dimidiabo 90, & habebo 45 pro mẽdietate recti, tantusꝙ pronunciabitur uterꝙ angulorum a & b.

XXIIII.

Si latus trianguli rectum subtendens angulum, alteri duorum recto subiacentium fuerit duplum, angulus acutus ab eis contentus, reliquo angulo acuto duplus enunciabitur. Vnde etiam utrunꝙ eorum agnoscet Geometra.

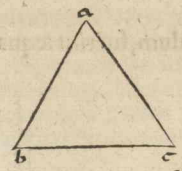


Sit triangulus a b c, rectum angulum c habens quem subtendat latus a b duplum lateri a c. Dico, ꝙ angulus b a c duplus erit angulo a b c. Extendatur enim a c usꝙ ad punctum d, donec c d habeat æqlis lateri a c, ducta linea b d, erit itaꝙ a b linea æqualis ipsi a d, ꝙ utriusꝙ medietas sit a c. sed per quartã primi dꝫ bases a b, b d triangulorum a b c, & b c d sunt æquales, anguli quoꝙ a b c & d b c æquales. totus igitur angulus a b d duplus est ad angulum a b c. est autem totus angulus a b d æqualis angulo b a d, siue b a c per quintã primi triangulo a b d æquilatero existente. unde & angulus b a c duplus erit ad angulũ a b c, qꝺ oportuit demonstrare. ◤ Ex hoc patebit corollarium. Quoniã enim in triangulo nostro angulus a duplus iam declaratus habeatur ad angulum b id est, sicut 2 ad 1, erit coniunctim aggregatũ ex duobus angulis a & b ad angulum b, sicut 3 ad 1. Illud autem aggregatum æquipollet angulo recto, hypothesi & 32. primi docentibus. proportio igitur anguli recti ad angulum b nota est, uidelicet sicut 3 ad 1. quare per sextã huius angulus b notus erit, recto per 21 huius noto existente. postremo etiã residuus ex recto angulus, scilicet a per 4 huius notus declarabit.

XXV.

Duobus trianguli cuiuscunꝙ cognitis angulis, tertium reliquum datum iri.

Trianguli a b c, duo anguli a & b sint cogniti. Dico, ꝙ & angulus c notus emerget. Tres enim anguli a b c, duobus rectis æquantur. 32. primi id confirmãte. duo aũt recti sunt noti per 21 & 3 huius, quare & aggregatum ex tribus angulis tri-

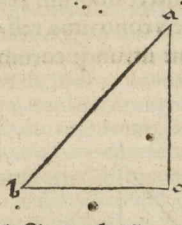


lis trianguli propositi notum habebitur. cumq; duos eorũ datos subiecerit hypothesis, p 4. huius tertius reliquus nõ ignorabitur, quod libuit inferre. ☞ Opus. Summã duorum angulorum, qui dati sunt ex quãtitate duorum rectorum minuas, & relinquetur tertij anguli quantitas desiderata. Vt si angulus a fuerit 20, & angulus b 35 graduũ, collectos 20 & 35 gradus, qui reddunt 55. ex 180 minuo. relicti enim 125 gradus, angulo c adnumerabuntur.

XXVI.

Omnis trianguli rectanguli duobus lateribus cognitis, tertium ex templo manifestari.

Triangulus a b c angulum ℞ rectum habeat, cuius duo latera quælibet sint nota. Dico, q; reliquum eius latus notum habebitur. Si enim duo latera rectũ continentia angulum offerantur nota, erunt per primã huius quadrata eorum nota. aggregatum quoq; ex eis per tertiã huius notum, quod æquipollet quadrato a b per penultimã primi, unde ipsum notũ, & ideo per secundam huius costa eius cognita, quæ fuerit lucubrãda. ☞ Opus uulgare. Si latera rectum ambientia angulum fuerint data, quadrabis ea, quadrataq; congregabis, & collecti ex eis radix quadrata quãtitatem lateris quæsiti manifestabit. Si uero alterũ eorum sit datum cum latere rectum subtendente angulum, quadratum minoris ex quadrato maioris demas, & relicti quadrata radix tertium latus notificabit. Vt si latus a c fuerit 12, & b c 5, quadrabo 12, exurgunt 144. itẽ quadrabo 5, ueniunt 25. colligo 144 & 25, fiunt 169. quorum radicem quadratam inuenio 13. tantumq; fore didici latus a b. Sed ponatur latus a b 29, & latus a c 20. duco 29 in se, ueniunt 841. similiter 20 in se, faciunt 400. aufero 400 ex 841. relinquũtur 441, quorum radicẽ quadratã 21 lateri b c deputabo. Ita in cæteris.

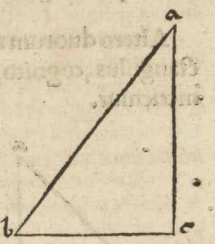


XXVII.

Trianguli rectanguli duobus lateribus cognitis, omnes angulos datum iri.

Si alterum datorum laterum recto opponatur angulo, satis est. si uero nõ, per præcedentem ipsum addiscemus, nam absq; eo propositum attingendi nõ erit potestas. Sit itaq; triangulus a b c, ângulũ c rectum habens, cuius duo latera a b & a c sint data. Dico, q; omnes anguli ipsius noti erunt. Super uertice enim anguli acuti b, quem uidelicet latus subtendit datum tanq; centro, secundum quantitatem lateris b a circulo descripto, erit per 20 huius a c sinus arcus sibi conterminalis, qui respondet ângulo a b c quem inquirimus. cũq; duæ lineæ a b & a c inter se datæ sint ex hypothesi per mensurã ueterem, a b autem semidiameter circuli descripti data sit per mensurã nouã, quæ quidem est una partium sinus totius, erit & a c nota per eandem mensurã docente septima huius. dum igitur a b est sinus to-

sinus totus uel sinus quadrantis, erit a c sinus notus, & per tabulã sinus, qua neglecta, hoc in propsito nihil efficere possumus, arcũ eius addiscemus. cognito autẽ arcu dicti sinus, daẽ & angulus quẽ respicit arcus ille, nã arcus ipse & angulus secundũ eundẽ numerũ mẽsurantẽ, quẽadmodũ tota circũferẽtia & q̃tuor recti anguli secundũ eundẽ numerũ cõiter mẽsurãtur, q̃d in 21 huius cõmemorauimus. per 22 itaq; huius reliquũ acutum angulum b a c cognoscemus. Rectum autem angulum a c b, 21 huius notum demonstrabat. Vniuersos igitur trianguli nostri angulos reddidimus notos, quod decuit explanare.



¶ Opus. Numerũ lateris rectum subtendentis angulum constitue primum, & numerum lateris respicientis angulum quæsitum pro secundo ponas, numerũ uero sinus totius tertium. Multiplica igitur secundum per tertium, & productum diuide per primum, exibit enim sinus arcus respicientis angulum quæsitum, cui per tabulã sinus arcum suum elicias, cuius etiã numerus angulum quæsitum manifestabit, hunc si ex anguli recti quantitate dempseris, relictum numerabis secundum angulũ acutum. Vt si a b fuerit 20 a c 12, & b c 16, sinus autem totus quemadmodũ in tabula nostra supposuimus 60000, multiplicabo 12 per 60000, producuntur 720000, quæ diuido per 20, exeunt 36000, huius sinus arcum tabula præbet gradus 36, & minuta 52 ferè. tantũ igitur pronunciabimus angulum a b c, qui tandem sublatus ex 90, relinquet 53 gradus & 8 minuta ferè, & tantus habebitur angulus reliquus acutus.

XXVIII.

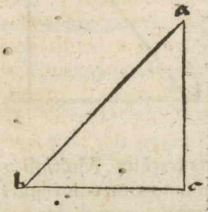
Data proportione duorum laterum trianguli rectanguli, angulos eius percontari.

Aut enim alterum duorũ laterum opponitur recto angulo, aut non. Si primũ sit latus a b recto angulo a c b oppositum, cuius proportio ad latus a c sit nota, Dico, q̃ anguli huius trianguli innotescent. Est enim a c sinus arcus anguli a b c per huius, dum a b est semidiameter circuli scilicet sinus totus, proportio ergo sinus totius ad sinum anguli a b c nota est, hinc sinus ille notificabitur, & tandẽ angulus a b c non latebit. Si uero proportiõ duorum laterum b c & a c data fuerit, erit proportio quadratorũ notum data, & cõiunctim proportio aggregati ex quadrato b c cum quadrato a c, hoc est quadrati a b propter angulum c rectum ad quadratum a c nota erit: unde & linearum proportio non ignorabit, reliqua ut ante. ¶ Operatio. Si alterum duorum laterum recto angulo opponatur, multiplica terminũ minorem proportionis datæ per sinum totum, & productum diuide per terminũ maiorem, exibit enim sinus anguli, cuius latus breuius opponitur. Si uero duorum laterum recto circumstantiũ data fuerit proportio, duc utrunq; terminorũ in se, & collecti ex productis radicẽ accipe quadratã, ipsa enim erit terminus lateri, quod rectum subtendit angulum accomodandus, perduceris ergo ad iter pristinũ. Vt si proportio a b ad a c fuerit sicut 9 ad 7. multiplico 7 in sinum rectum totum 60000, fiunt 420000. quæ diuido per 9, exeunt 46667 ferè. arcus autem respondens huic sinui recto est gr. 51. minuta 3 ferè, & tantus habebitur angulus a b c. Sed ponatur proportio a c ad c b sicut 12 ad 5. duco 12 in se, fiunt 144. item 5 in se, reddunt 25. hæc coniungo, faciunt 169. horum radix est 13, attribuenda lateri a b, sic proportio a b ad a c erit ut 13 ad 12.

unde ut prius angulo a b c cognoscendo uia parata est.

XXIX.

Altero duorum acutorum angulorum, quos habet triangulus rectangulus, cognito, cum uno eius latere & angulos cunctos & latera metiemur.

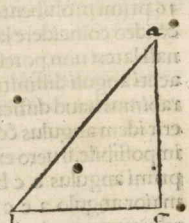


Trianguli a b c angulum c rectum habētis, angulus b sit cognitus cū latere uno quocūq; (uerbi gratia) a c. Dico, q̄ omnes eius anguli cum lateribus omnibus innotescent. Anguli profecto cognoscentur ex 21 & 22 huius. restat igitur inuenire latera. Per 20 autem huius & tabulam sinus hypothesi iuuante, erit utrunq; laterum a c & b c cognitum, ut a b est sinus totus, duo itaq; latera quæ libet trianguli propositi datam inuicem habebunt ꝓportionem, cunq; ex hypothesi unū eorum datum sit per mēsurā nouam, erunt per 6 aut 7 huius reliqua data, quod libuit attingere. ☞ Opus pulchrū & perutile. Sinum arcus anguli dati, & eius cōplementi addiscas, habebisq; tria latera nota per mensuram ueterem, quæ est pars una sinus totius, nam latus rectum subtendens angulum est sinus totus. Si igitur latus, quod rectum subtendit angulum, fuerit datum per mensuram nouam, pone sinum totum pro primo, & sinum arcus anguli, cui opponitur latus quæsitum, pro secundo, numerū autem nouæ dationis tertiū. multiplicatoq; secundo per tertium productum diuide per primum, & exibit numerus lateris quæsiti. Si uero alterum duorum laterum recto subiacentium detur, uolendo mensurare latus rectum subtendēs angulum, pone sinum arcus anguli, cui opponitur ipsum latus datum pro primo, & sinum totum pro secundo, numerum autem dationis nouæ tertium, absolutoq; opere uulgari quatuor numerorū proportionaliū ad metam perduceris cupitam. Quod si reliquū latus recto substratū angulo inuestigaueris, pone sinū arcus anguli, cui opponitur, latus datum pro primo, & sinum complementi eius pro secundo, numerū uero dationis nouæ tertium, reliqua ut antehac executurus. In exemplo. Detur angulus a b c 36 graduū, & latus a b 20 pedū, subtraho 36 à 90, manebunt 54 gradus, qui determinant quantitatem anguli b a c. inuenio autem lineam a c 35267 ex tabula sinus, b c uero 48541, dum a b est sinus totus 60000. Multiplico igitur 35267 per 20, producuntur 705340, quæ diuisa per 60000, eliciūt 11 $\frac{45}{60}$ ferè. latus itaq; a c habebit pedes 11 & $\frac{45}{60}$, id est tres quartas pedis unius. Similiter multiplico 48541 per 20, producuntur 970820, quæ diuido per 60000, exeunt 16 & 11 minuta ferè, tantumq; latus b c pronunciabitur. Quòd si ponatur latus a c 20, reliquis ut antea manentibus, erit iterum a c latus 35267, & b c 48541, dum a b est sinus quadrantis 60000. Ad inueniendū igitur latus a b, multiplico 60000 per 20, producuntur 1200000, quæ diuido per 35267, exeunt 34 & 2 minuta ferè, habebit itaq; latus a b pedes 34 & 2 minuta ferè. Sed libeat mensurare latus b c, multiplicabo 48541 per 20, producuntur 970820, quæ diuisa per 35267. eliciunt 27 & 32 minuta ferè. latus igitur b c 27 & 32 minuta ferè pedis unius complectit. ☞ Hic parumper ausculta, quādoquidem opus nostrū Triangulorū Astronomiæ seruit plurimū, quæ fractionibus nō tam uulgaribus q̄ Physicis utit, quo pacto fractiones uulgares in physicas cōmutentur, non erit silentio prætereundum. Omni nanq; integrorū absoluta diuisiōe si aliquid de numero diuiso; quod necessario minus inuenietur diuisore; relictum fuerit,

fuerit, diuisor autem numerus alius q̄ 60 fuerit, fractio uulgaris habebitur, cuius numerator quidem est ipse numerus relictus, denominator autem numerus diuisor. uolendo igitur eā minutiā reddere physicam, cum physicas minutias sexagenarius numerus denominare soleat: multiplicabimus numeratorem minutiæ uulgaris per 60, productū uero per denominatorem minutiæ uulgaris partiendo, exibit numerator minutiæ physicæ æquipollentis dictæ fractioni uulgari. Quod si iterū fuerit residuū facta diuisione iam dicta, ipsum per 60 extendemus, & productū per diuisorem pristinū partiemur, exibit enim fractio physica secundi ordinis. huiusmodi demū si repetieris opus, minutia physica tertij ordinis emerget. Primas aūt minutias, quæ statim post diuisionem integrorū eliciuntur, minuta prima uulgus appellat Astronomorū, secundas uero secunda, tertias tertia, & ita de cæteris ex ordine suo. Huic autem præcepto ne iusto amplius digressi uideamur, maiorū exempla non subiecimus, cum & inuentu facilia, & in pleriscp locis alijs satis aperta dinoscantur.

XXX.

Si trianguli rectanguli datus fuerit alter acutorum angulorum, proportiones laterum inter se, quamuis latera ipsa non dentur, notas habebimus.

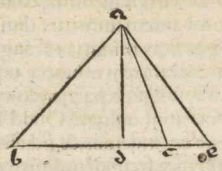


Sit triangulus rectangulus a b c, angulum c rectum habens, cuius angulus b acutus sit datus. Dico, q̄ proportiones quorumlibet duorū laterum notæ deprehendentur. Erit em per 22 huius & angulus a cognitus, quare per tabulā sinus uigesima huius dirigente utrunq; laterū a c & b c notum dabitur, ut a b est sinus totus, tribus itaq; lateribus tres notos assignabimus numeros, per diffinitionem igit notæ proportionis theorema uerum enūciasse confiteberis. ¶ Opus facile. Quære sinum arcus anguli dati, & sinū eius complementi, habebis q̄ duos numeros duobus lateribus rectum ambientibus deputandos, pro latere autem tertio sinum quadrantis constitues, quo facto, scies proportionem quorūlibet duorum laterum esse ut proportionem numerorū sibi respondentium. Vt si angulus b fuerit 36, quæro sinum 36 graduū, qui est 35267. sinūq; complementi eius scilicet 54. graduum, qui est 48541. pro latere autem a b pono 60000. scio itaq; proportionē a b ad a c esse ut 60000 ad 35267. & ita de cæteris.

XXXI.

Si supra basim trianguli, cui perpendicularis à uertice anguli cuiuscunq; ducenda insidebit, alter duorum angulorum obtusus fuerit, extra triangulum ipsa cadet. si uero rectus coincidet cum latere sibi conterminali, quod recto substernitur angulo, uterq; autem acutus eam intra triangulum consistere iubebit.

Supra basim b c trianguli a b c alter duorum angulorum b & c, uerbi gratia angulus b sit obtusus. Dico, q̄ perpendicularis à uertice anguli a demittenda ad basim b c cadet extra triangulum a b c. & si angulus b rectus fuerit, coincidet cum latere a b. si uero uterq; angulorū b & c acutum se offerat, ipsa perpendicularis triangulū non egredietur, uerum in eo cōsistere coget. Aduersario enim

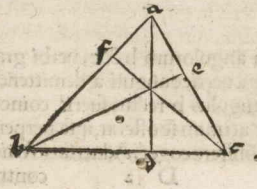


contrarium primæ partis affirmanti concludemus impossibile hoc pacto. Perpendicularis non cadens extra triangulum necessario intra triangulū manebit, aut cum altero laterum sibi conterminaliū coincidet. Cadat primo sententia quidem aduersarij intra triangulum, sitq; a d, erit itaq; angulus a d c rectus per diffinitionem, & per 16 primi: cum sit extrinsecus ad triangulū a d b: maior angulo a b d intrinseco sibi opposito, quem obtusum statuimus. rectum igitur maiorem obtuso confitebitur falsigraphus, quod est impossibile. Quòd si dixerit eam coincidere alteri duorum laterum a b & a c, coincidat prius lateri a b, erit itaq; angulus a b c rectus, quem hypothesis assentiēte etiā aduersario obtusum præbuit, quod est in cōueniēs. si uero coincidat lateri a c, erit angulus a c b rectus, angulo itaq; b obtuso existente per hypothesim, non erunt duo dicti anguli minores duobus rectis, quod cum repugnet decimæseptimæ primi impossibile perhibebitur. destructis autem impossibilibus illis, inferemus aperte primæ partis ueritatem. Similiter ratā faciemus secundā partē. Nam siue proteruiendo dicatur eam cadere intra triangulum, ut est a d, siue extra, qualis est a e, sequitur ex diffinitione perpendicularis angulum extrinsecū æqualem esse intrinseco sibi opposito, quod cum esse nequeat 16 primi prohibente, constat ipsam intra triangulū non cadere, neq; extra eum, & ideo coincidere lateri apud quod rectus est angulus, reliquo enim sibi cōterminali lateri non potest coincidere, sic enim acutus angulus rectus haberetur, quod acuti anguli diffinitio non permittit. Tertiæ tandem parti certitudinem comparabimus haud difficilius. Si enim dixeris eam coincidere cum altero duorū laterū, erit idem angulus & rectus per diffinitionem, & acutus per hypothesim, quod est impossibile, si uero extra triangulū cadere putabis eam, sit ipsa a e. erit igit per 16 primi angulus a c b extrinsecus ad triangulū a e b, quē acutū pbuit, hypothesis maior angulo a e c recto per diffinitionē, quod est impossibile, quo interempto, relinquetur ueritas tertiæ partis, sicq; totum theorema nostrum ueritatem enunciasse monstrauimus.

XXXII.

In omni triangulo ex notis tribus constante lateribus, si una trium perpendicularium data fuerit, reliquæ duæ non latebunt.

Perpendiculares intelligo ductas à uerticibus angulorū uersus latera ipsis angulis oppo. ita. Sit triangulus a b c, cuius tria latera sint data, producāturq; tres perpendiculares a d, b e, & c g uersus latera subtendentia angulos, à quorū uerticibus ducuntur. non refert autem siue omnes ipsæ intra triangulū cadāt, siue aliqua earum extra, nisi q latus uersus quā ducitur perpendicularis extra triangulū cadens prolongetur, donec suæ occurrat perpendiculari. Tres autem perpendiculares illæ in eodem puncto se intersecabunt, quod alio in loco demonstratum tradidimus. Sit itaq; data ppendicularis a d, dico, q reliquæ duæ datuntur notæ. Tendamus primum ad inquisitionem perpendicularis b e. Cum igitur duo trianguli a d c & b e c sint æquianguli, q angulum c communem habeāt, & utrunq; angulorū apud



puncta

puncta d & e rectum per diffinitionē anguli recti, & ideo per 32 primi reliquos duos angulos æquales, erit per quartā sexti proportio a c lateris ad latus c b, sicut a d perpendicularis ad ꝓpendicularem b e. tres autem primas harum quatuor quantitatū proportionaliū notas obtulit hypothesis, quare per 19 huius quarta uidelicet perpendicularis b e scita concludetur. Non aliter ad reliquā perpendicularem mensurandā perducemur, quod expectabas ostendendū. Vniuersaliter autē ex hoc trahimus, ꝙ eandem proportionē habeant quælibet duæ perpendiculares quā sibi conterminalia latera continentia angulum, cui ipsæ perpendiculares opponunt. ¶ Opus huius ab ope, ꝙd 19 huius tradidit generale, nō discrepabit.

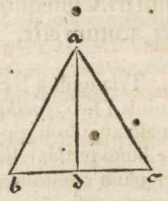
XXXIII.

Omnis trianguli æquilateri tres angulos cōuincemus esse notos, unde quemlibet eorum acutum esse constabit.

Habet nanq; omnis triangulus æquilaterus tres æquales angulos per quintā primi, qui per 32 eiusdem duobus rectis æquipollent, unde quilibet eorum tertia pars duorum rectorū angulorum habebitur. Summā autem duorum rectorum ex 21. & 3. huius notam addiscemus, quare per sextam huius quilibet eorū datus exurget, quod cupiebas explanandū. Cum autem summa duorum rectorū tripla sit ad unum quenq; eorum, dupla uero ad rectum unum, erit per 10. quinti unusquisq; eorum minor recto, & ideo per diffinitionem acutus, quod pollicebaꝫ corollariū.

XXXIIII.

Omnis trianguli æquilateri latus perpendiculari suæ potentialiter sesquitertium esse. Vnde ex latero noto perpendicularis & econtra noticiam consequemur.



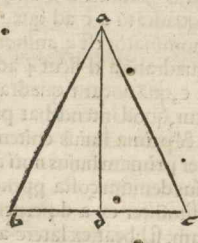
Ab angulo a trianguli æquilateri a b c descēdat perpendicularis a d ad basim b c cadens per corollariū præmissæ & 30. huius intra triangulum a b c. Dico, ꝙ latus trianguli a b c potentialiter sesquitertiū sit ꝓpendicularis a d. Ipsa enim perpendicularis basim in æquas partitur sectiones, penultima primi & cōmunibus animi conceptionibus id concludentibus. b c igitur aut a c sibi æqualis, dupla est ad lineam d c, quare per quartā secundi, aut 18. sexti quadratū a c quadruplū erit quadrato d c, penultima autē primi quadratū a c duobus quadratis linearum a d & d c æquiualere docuit. Duo igitur huiusmodi quadrata coniūcta quadruplū efficiunt quadrato d c, habent itaq; proportionem ad quadratū d c sicut 4 ad 1. quare diuisim ꝓportio quadrati a d ad quadratum d c erit sicut 3 ad 1, tripla uidelicet. erat autem quadratū a c ad quadratum d c quadrupla. maioris itaq; harum ꝓportionū denominator est 4, minoris uero 3, quare per corollariū 12 huius quadratī a c ad quadratū a d sicut 4 ad 3 sesquitertia scilicet concludetur. potentia igitur lateris a c, quā uocant quadratū eius potentiæ perpendicularis a d sesquitertia conuincitur, quod intendebat propositio. Quod autem corollariū huius pollicebatur, sexta & prima huius enitent. Nam sexta huius ex ꝓportione iam data quadrati a c, per primam huius noti ad quadratū a d, ipsum quadratū a d suscitabit notum, cuius demum costa ꝓpendicularis scilicet a d per secūdam huius emerget cognita, similiter ex a d perpendiculari data latus a c notum explicabimus. Poteris etiam, si libeat, ex latere a c

noto per hypothesim corollarij præsentis,& angulo a c b per præcedentem cognito 28 huius dirigente perpendicularē a d mensurare,& uiceuersa ex perpendiculari data latus reddere cognitum. ◤ Operatio. Dimidiū latus notum in se ductum triplabis,triplatiq; radicem extrahes quadratā,ut libet cū ꝓpinquissime, quā asscribes perpendiculari a d. Aut ex quadrato lateris cogniti quartā sui partem demas,& relicti radicem elicias quadratā ꝓpinquā,ut placet,quæ ꝓpendicularem a d notificabit. In exemplo. Sit latus a c 12.& medietas eius 6.quæ ducta in se reddunt 36.hæc triplata faciunt 108.quorū radix quadrata ꝓpinqua est 10 $\frac{391}{1000}$.tantam igitur ferè ꝓpendicularē a d prædicabis. Aut multiplicatis 12. in se fiunt 144.quorum quarta pars 36.dempta ex ipsis 144. relinquet 108. quadratū uidelicet perpendicularis a d,cum quo ut antehac operabimur. Qđ si ex perpendiculari data libeat elicere latus,ꝓpendicularem in se multiplica, productoq; tertiam sui partem adijcias,& resultabit numerus quadrato lateris deputandus,cuius radix ꝓpinqua latus ipsum manifestabit. Vt si perpendicularis fuerit 6. multiplico 6 in se,fiunt 36.quorū tertia pars est 12.hæc adiecta,congregabit 48. quorum radix quadrata ad ꝓpinquū est 6 $\frac{116}{129}$.& tantum habitur ad propinquum latus a c. Iuberis autē quærere rādicem quadratā ad ꝓpinquū,nam si latus ipsum posueris notum secundū numerum quemcunq;,impossibile est perpendicularem præcise notam fieri,latus enim & ꝓpendicularis potentia tantū cōmunicantes sunt,quoniam quadrata sua sunt in ꝓportione numerorū non quadratorum, quēadmodum in præsenti didicimus theoremate. similiter si perpēdicularis supponatur nota,non erit unq; latus trianguli æquilateri cognitum præcise. Nunc ad triangulos æquicrures descendamus.

XXXV.

Quocunq; angulorum trianguli æquicruris cognito, reliquos datum iri. Cum quo declarabitur, utrunq; angulorum, quos basis sustentat, acutum esse.

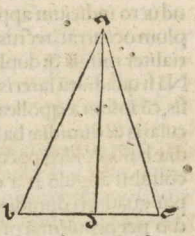
Trianguli a b c,duo latera a b & a c æqualia habentis, angulus b sit cognitus. Dico,ꝙ reliqui duo non uenient. Est enim per quintā primi angulus c æqualis angulo b,ꝓpter latera a b & a c æqualia,quare & ipse notus,& ideo per 25.huius tertius reliquus angulus b a c innotescet. Non aliter ꝓcedemus,si quis angulum c notum obtulerit. Quod si angulus a detur,erit per 4. huius residuum duorum rectorū cognitum,quod est aggregatū ex duobus angulis b & c æqualibus,& ideo per sextā huiusmodi uterq; eorū datus cū sit medietas huius aggregati. Vnicus igitur angulus quilibet trianguli æquicrurij cognitus socios suscitabit suos,quod expectabatur ostendendū. Cum autem duo recti ad unum rectū se habeant,sicut aggregatum ex duobus angulis b & c ad utrunq; eorum,est enim utrobiq; dupla proportio, duo autem recti maiores sunt duobus angulis b & c collectis per 17. primi,erit quoq; per 14. quinti unus rectus maior utroq; angulorū b & c. per diffinitionem igitur anguli acuti uterq; eorum acutus habebitur,quod enunciabat corollariū. ◤ Operationem accipe. Si alter duorum æqualium,qui basi insident,angulorū notus præbeatur,erit & reliquus secundum eundem numerum notus,hunc numerū duplabis,& duplum subtrahes à numero



mero duorum rectorum, qui enim relinquitur numerus, angulo, quem basis respicit, deputabitur. Si uero angulus, quem duo æqualia ambiunt latera, notus offeratur, numerum eius à numero duorum rectorum minues, nam relicti numeri medietas utrunq; æqualiũ angulorum patefaciet. In exemplo: Sit angulus b 30 gradu um, erit autem & angulus c sibi æqualis 30. hi collecti, reddunt 60. qui sublati ex 180. numero duorum rectorum usitato, relinquũt 120. & tantus erit angulus a. Sed ponatur angulus à 150. minuo 150. ex 180. ualore scilicet duorum rectorũ relinquuntur 30. quorũ medietas 15 utrunq; angulorũ b & c cognitũ efficit.

XXXVI.

Perpendicularem duobus trianguli æquicrurij notis lateribus conterminalem, cui basis nota per medium diuisa substernitur, faciliter indagare.



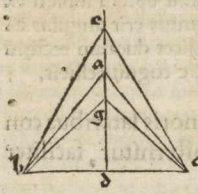
Sit triangulus æquicrurius a b c, cuius basis b c data sit, lateraq; a b & a c cognita, à quorũ cõmuni puncto a ad basim b c descendat perpendicularis a d, cadens intra triangulum, quemadmodũ ex præcedenti & 30. huius concluditur. Dico, ꝙ ipsa ꝑpendicularis a d nota ueniet. Quoniam enim uterq; angulorũ supra basim apud punctum d rectus est, erit per penultimã primi tam quadratũ lineæ a b æquale duobus quadratis linearum a d & d b, q̃ quadratum a c duobus quadratis linearum a d & d b. sunt autẽ duo quadrata linearum a b & a c æqualia ꝑpter costas suas æquales, quare & aggregatum ex duobus quadratis a d & d b æquale aggregato ex duobus quadratis a d & d c. dempto igitur cõmuni quadrato a d, relinquetur quadratum b d æquale quadrato d c, unde & linea d b æqualis lineæ d c concluditur. cunq; tota b c nota sit ex hypothesi, erit per sextam huius utraq; linearum d b & d c nota, sunt enim eius medietates. quadratum itaq; lineæ d c per primã huius notum habebitur, sed & quadratum a c per eandem iuuante hypothesi notum est, à quo cum superet quadratum d c in quadrato a d per penultimã primi, si quadratum d c notum abstraxeris, relinquetur per quartã huius quadratum perpendicularis a d notum, & ideo per secundã huius ipsa ꝑpendicularis a d cognita, quod placuit attingere. ¶ Opus. Quadratum dimidiæ basis ex quadrato lateris minuas, relicti enim radix quadrata ꝑpendicularẽ manifestabit. Vt si basis b c fuerit 10. & utrunq; laterum a b & a c 13. quadrabo medietatem basis, quæ est 5. exurgũt 25. item quadrabo numerum lateris scilicet 13. producuntur 169. à quibus postq̃ 25 dempsero, relinquent̃ 144. pro quadrato perpendicularis a d, quorum radicẽ quadratã 12 perpendicularis sibi uendicabit.

XXXVII.

Quales habeat angulos æquicrurius triangulus, ex cognitis lateribus & basi faciliter indagare.

Qualitatem anguli dicimus rectitudinem acutiem & obtusitatem. Duobus ad hoc iudicijs perducemur, quorũ unũ accipit̃ ex ꝑpendiculari ad basim demissa & basi, aliud uero ex latere & basi. Nam si ꝑpendicularis dimidiæ basi fuerit æqualis, angulus, cui basis opponitur, rectus erit, si uero minor fuerit medietate basis obtusus, & si maior acutus, quorũ demonstrationem breuiter afferemus. Sit enim in triangu-

triangulo æquicrurio a b c perpẽdicularis a d æqualis medietati basis d c, erit itaq; ex processu 23 huius bis assumpto utercq; angulorum d a c, & d a b medietas recti, totus igitur angulus ꝑ a c rectus habebitur. Si autem a d perpendicularis minor fuerit medietate basis b c, prolongetur d a in e, donec d e fiet æqualis lineæ d c, ductis lineis e b & e c nouũ æquicruriũ tri

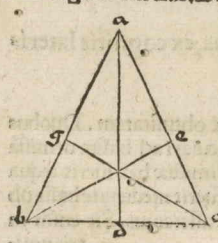


angulum claudentibus per 4 primi, cuius angulus b e c ex recitato processu rectus declarabit. unde & per 21 primi angulus b a c maior eo, & ideo obtusus enunciabitur. Sed si perpendicularis a d maior fuerit medietate basis d c, abscindatur ex ea d g æqualis d c, extensisq; lineis b g & g c, probabitur ut prius angulus b g c rectus, qui ꝑ 21 primi maior est angulo b a c, angulũ itaq; b a c minorem esse recto, & ideo acutum nemo dubitabit. ¶ Asi ud uero indicium apparebit hoc pacto. Si latus medietati basis potentialiter duplum occurrat, rectus prædicabitur, quem basis subtendit angulus. si uero potentialiter minus ꝙ duplum obtusus, & si maius ꝙ duplum acutus, quod sic cõstabit. Nã si quadratũ lateris, q̃d suã dicimus potẽtiã, duplũ fuerit quadrato dimidiæ basis, cũ ipsum æqpolleat ꝑ penultimã primi duobus quadratis ipsius scilicet ppendicularis & dimidiæ basis, planũ erit quadratũ ppẽdicularis æquari quadrato dimidiæ basis, & ideo ppẽdicularẽ dimidiæ basi. ad prius igit̃ explanata si refugerimus cõstabit angulũ b a c esse rectum. Si uero quadratũ lateris a b minus fuerit ꝙ duplũ quadrati dimidiæ basis, erit & aggregatũ ex duobus quadratis linearũ a d & d b per penultimã primi minus ꝙ duplũ quadrati b d. unde quadratũ a d minus oportebit esse quadrato b d, & ideo cõstam huius lineam scilicet a d minorẽ costa illius b d, ex prædictis ergo angulum b a c obtusum esse non ignorabimus. Quod si quadratũ a b maius fuerit duplo quadrati b d, cõcludemus ut nuncnũc fecimus lineam a d longiorem linea b d. quamobrẽ ex supra memoratis in primo indicio angulus b a c acutus explorabitur. Qualis itaq; sit angulus, quem basis subtendit, gemino monstrauimus indicio. utrunq; autem reliquorũ, quos dicta sustentat basis, acutum esse docuit corollarium 34 huius. ¶ Opus uero posteaq̃ ex præcedenti perpendicularem didiceris, ex processu huius facile comparabis.

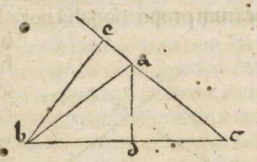
XXXVIII.

Trianguli æquicrurij siue latus quodcunq; dederis, siue perpendicularem cum uno angulorum, & reliqua latera & perpendiculares mensurabuntur.

Sit triangulus æquicrurius a b c, cuius unum latus quodcunq; sit notũ cum uno angulorum eius. Dico, q̃ reliqua duo latera nota fient cum perpendicularibus. Detur enim primo alterum duorũ laterũ & sit a c, demissaq; perpendicularis a d ad basim b c, erit triangulus a d c rectangulus, cuius angulus c acutus ex corollario 34. huius notus habebitur, siue per hypothesim solam, siue per hypothesim & 34. huius, quare per 28 huius latere a c noto existente, tam linea a d perpendicularis, q̃ d c notæ occurrent, duplicata autem d c nota proueniet basis b c data. latus autem a b cum sit æquale lateri a c, nemini erit ignotum. Sic igitur & latera reliqua



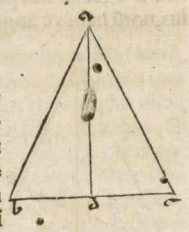
liqua & perpendicularem unam mensi sumus. Qđ si detur basis b c cum aliquo angulorum, erit & eius medietas d c data, habebitq; triangulus a d c rectangulus notum latus d c, & angulum c acutum cognitum, quare per 29 huius reliqua eius duo latera non ignorabuntur, quorũ unum est perpendicularis a d quæsita, reliquũ uero etiam triangulo æquicrurio proposito commune est. Perpendicularẽ autem b e aut c g basi conterminalẽ, ex 32 huius perpendiculari a d nota existente, facilius addiscemus. Postremo ex perpendiculari nobis data, cum angulo quocũq; reliqua scibilia depromemus. Deẽ em primo ppendicularis a d basi insistens, qua intra triangulum cadet, ut supra confirmauimus, oportet autẽ & angulum c acutum esse notum, siue per hypothesim solam, siue per hypothesim & 35 huius. Triangulus itaq; a d c rectangulus, cum & latus a d notum habeat, & angulum c datum, reliqua sua latera a c & d c, per 29 huius adducet cognita, cunq; d c sit medietas basis, tota quoq; basis b c trianguli ppositi non erit ignota. est autẽ a b æqualis ipsi a c, notæ igitur uenerunt omnes lineæ trianguli ppositi, perpendicularem autem b e aut c g, 32. huius afferet cognitam. Sed si deẽ angulus quicunq; cum altera perpendicularium b e & c g, habebit triangulus b e c latus b e cognitum cum angulo acuto c, & ideo per 29 huius b c linea dabitur cum eius medietate d c. Iterum ergo triangulus a d c rectangulus, notum latus d c habens cum angulo c, latus suũ a d, perpendicularem scilicet trianguli æquicrurij ppositi cum latere a c per 29 huius manifestabit. Vna igitur ex lineis memoratis quæcunq; cum unico angulo quicquid in triangulo æquicrurio inquiri solet, apertum efficiet, quod libuit absoluere. ☞ Opus autẽ huius, ne diutius æquo detinearis, missum facimus, quod quidem haud difficulter colligemus, si ad 29 & 32 huius confugerimus.



XXXIX.

Lateribus trianguli æquicrurij cum basi cognitis, omnes ipsius angulos manifestare.

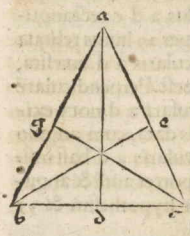
Triangulus a b c æquicrurius duo latera a b & a c nota habeat cum basi b c. Dico, q̃ omnes eius anguli noti fiẽt. Demissa enim ad d basim ppendicularis a d, erit d c nota, cum sit medietas basis, ut supra cõmemorauimus. duo igitur latera a c & d c trianguli, a d c rectanguli nota sunt, quare per 27 huius angulus eius c, qui & triangulo a b c cõmunis est, notus comprehẽditur. unde & per 35 huius reliqui anguli trianguli a b c propositi non latebunt, quod censebam demonstratũ iri. ☞ Operationes autem 27 & 35 huius, si commisceas opus theorematis præsentis facile conflabis.



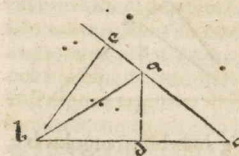
XL.

Si perpendicularem trianguli æquicrurij datam habueris, ex basi nota latus, aut econtra ex latere noto basim elicies.

Sit triãgulus æquicrurius a b c, cuius altera perpendicularium a d & b e, uel g data sit. Dico, q̃ si etiam basis b c nota fuerit, latus a c cognitũ erit, & econtra, si



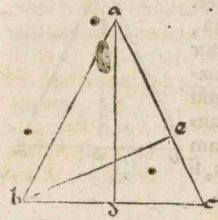
tra,si latus a c uel a b notum fuerit,basis ipsa non ignorabitur.Sit enim primo perpendicularis a d nota cum basi b c,erit itaq; & d c medietas basis cognita,quare per 26 huius a c nota dabitur.Si uero a c latus offeratur notum,erit per allegatam 26 huius linea d c nota,quæ cum sit medietas basis,duplata basim,ipsam constituet.Sit deinceps ppendicularis b e uel c g nota cum basi b c,siue intra siue extra triangulum cadat.duobus itaq; triangulis rectangulis b e c & a d c,angulus c cõmunis erit,quare per 32 primi æquianguli concludentur,& ideo per quartam sexti erit proportio e c ad c d,sicut b c ad c a.tres autem primæ harum linearum proportionaliũ notæ sunt,e c quidem ex hypothesi & 26 huius,b c ex hypothesi,& d c medietas ipsius b c.quare per 19 huius a e quarta nota ueniet,scilicet latus trianguli æquicruris quæsitum.Si uero perpendicularẽ b e data tam habueris cũ latere a b,erit per 26 huius a e nota.est autem ex diffinitione æquicruris trianguli a c æqualis ipsi a b,quare & a c nota,& per tertiã aut quartã huius e c cognita.duobus itaq; lateribus b e & e c trianguli b e c rectanguli notis existentibus,erit per 26 huius linea b c nota,basis scilicet trianguli nostri.Quo autem pacto perpendicularis una reliquam suscitare soleat,superius explanatũ est. ☞ In operatione huius non morabimur,quam quidem ex operibus præallegatarum ppositionum facile conflabimus.



XLI.

Vno duntaxat angulo trianguli æquicruris cognito, utrunq; latus ad basim & perpendiculares,notas habebit proportiones.

Sit triangulus æquicrurius a b c,unum habens notum angulũ quemcunq; cuius duæ perpendiculares sint a d & b e.Dico,q; proportio a c lateris ad basim b c,& ambas perpendiculares nota fiet.Erit em triangulus a d c rectangulus,notũ habẽs c angulũ acutũ ex hypothesi sola,aut ex hypothesi & 35 huius,quare per 30 huius proportio a c ad a d perpendicularem nota erit,sed & eiusdem a c ad lineã d c ex eadẽ 30 p portio non ignorabitur.cunq; proportio d c ad c b sit nota,est enim ut medietatis ad totum,erit per 12 huius proportio a c ad basim b c cognita.Sic quo pacto notæ fiant proportiones laterís a c ad perpendicularẽ a d & basim b c iam explanauimus.Rursus triangulo a b e rectangulo angulũ a notum habente,aut per hypothesim solam,aut per hypothesim & 35 huius,erit p 30 huius proportio a b lateris ad perpendicularem b e nota.quicquid autem de altero laterum a b & a c prædicamus,& de reliquo cum sint æqualia enunciatum intelligemus.uerum igitur est,quod theorema ppposuit.



☞ Operari aũt,si uoles,propositiones theorema nostrũ confirmantes repetito.

In tertio

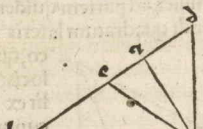
In tertio demum triangulorum genere ludendum censeo.

Tria superius triangulorũ diffiniuimus genera, quorũ primo ab æqualitate laterum sumenti originem modicum accidit uarietatis, in eis quas Mathematici scrutantur rebus. in secundo autem magis uaria est scibiliũ inquisitio, ꝙ ipsum ab unitate simplicitateq; laterum recedat. tertium uero genus, quo amplius à primo distat genere, eo difficilius se offert. In primo præterea genere, omnes anguli, non quidem ad spontaneam positionem tuam, sed necessitate cogniti sunt, unũquenq; enim eorum tertiam partem duorũ rectorum demonstrauimus, uno autem latere quolibet dato, reliqua duo non latebunt, ꝙ ipsa dato lateri sint æqualia. Secundũ uero triangulorũ genus angulos suos non præbet cognitos, nisi aliquid ex angulis suis aut lineis præcognitũ habeatur, quod & in lateribus mensurandis euenire compertum est. Tertij autem generis tanta tamq; uaria est intricatio, ut non satis sit unum angulũ cum uno latere præsciuisse ad reliqua cognoscenda, aut duo eius latera tantũ, uerum ut latera & angulos metiamur uniuersos, aut tria latera præscienda sunt, ad tres angulos reperiendos, aut duo latera cum uno angulo, aut duo anguli cum uno latere. duobus enim angulis datis, tametsi tertius extemplo notus reddatur per 25 huius, non tamen latera nota ueniunt, uerum proportiones ipsorum laterũ duntaxat, quemadmodũ infra docebimus, notas fieri oportet. Postremo in his triangulis absq; notitia duorum casuũ aut alterius eorum, quos perpendicularis ex ipsa basi separat, nihil efficiet Geometra, quæ quidem perpendicularis diuersimode cadere solita, nunc intra nunc extra triangulum, ut supra tetigimus, multiuariam ignotorum faciet inquisitionem. Principio igitur explorandum arbitror, quales sint uniuersi anguli, quos habet propositus nobis triangulus trium datorũ laterum, unde perpendicularis quælibet quo pacto casura sit, dirigẽte 32. huius callebimus, cuius demum perpendicularis quantitatem metiri non prorsus inutile uidebitur.

XLII.

Triangulus notorum trium laterum, qualem quemuis angulum habeat percontari.

Sit triangulus a b c trium inæqualiũ, & notorum inter se laterum, cuius quales sint anguli experiũdum est. Faciamus primo periculũ de angulo a. dico autẽ, ꝙ si quadratũ lateris b c, ipsum angulũ a subtendẽtis, æquale fuerit duobus quadratis laterum a b & a c, quæ dictum ambiunt angulũ, rectus erit angulus ille. si uero minus illis quadratis, erit acutus, & si maius, obtusus, quæ sic constabunt. Si enim quadratum b c æquale reperiatur duobus quadratis a b & a c, erit per ultimam primi angulus a rectus. certum est igitur primũ indicium. Si uero quadratum b c minus fuerit quadratis a b & a c, non potest angulus a esse rectus, neq; obtusus, eo nanq; recto existente, quadratũ b c duobus quadratis a b & a c per penultimam primi æquabitur, quod est cõtrariũ posito. Sed non obtusus. sic enim per 12. secundi quadratũ b c maius duobus quadratis a b & a c habetur, quod cum repugnet posito, relinquit angulum a esse acutum, & ita secundum firmauimus indiciũ. Quòd si quadratũ b c maius fuerit quadratis a b & a c, nõ poterit angulus a esse rectus nec

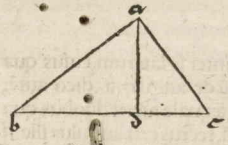


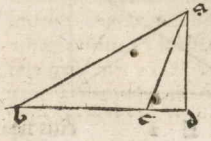
ctus neq; acutus, nam si alterum illorum dixeris, erit quadratum b c, aut æquale duobus quadratis a b & a c per penultimam primi, aut minus eis per 13. secundi, neutrū aūt horum cum posito stabit, cui igitur dubiū erit angulū a obtusum esse? Ad reliquos demū angulos quales sint, simili pducemur examine. ¶ Operationem ex processu iam facto non potes non comprehendere. In exemplo. Sit latus a b 7, latus b c 9, & latus a c 12, uolo scire qualis sit angulus a, quadrabo singula latera, quadratū de 7 est 49, quadratū de 9 est 81, quadratū uero de 12 est 144, colligo duo quadrata 49 & 144. resultant 193. cum itaq; quadratū de 9, quod est 81 sit, minus q̄ 193, pronuncio angulū a esse acutū. Ita in cæteris.

XLIII.

Datis tribus lateribus trianguli, duos casus, quos perpendicularis à puncto angulari ad basim descendens, ex ipsa distinguit basi, comperire.

Perpendicularis intra triangulū manens, duos casus profecto distinguet ex ipsa basi. quæ uero cū altero laterum coincidit, unum duntaxat casum habebit. perpendicularis autem extra triangulum cadente, casus huiusmodi non sunt portiones basis, uerum basis est pars alterius eorum. Sanè igitur intelligenda erat diffinitio casus ab initio posita. uocabulo enim basis, basim simpliciter dictam, & basim quantū oportet prolongatam significauimus. Cognitio autem casuū dictorū, aut alterius eorum, necessaria est ad perpendicularem trianguli tria latera nota habentis cognoscendam, per quam deniq; perpendicularem anguli quæri solent. Cum autem de his, quæ in triangulis rectangulis quæri solent, superiori loco satis dixisse uideamur, ad triangulos non rectangulos præcepta futura sonabunt potissimū, licet quædam ad rectangulos etiam applicari possit. Ex puncto igitur a trianguli a b c tria latera habentis nota uersus lineam b c procedat perpendicularis a d, distinguens ex basi duos casus b d & d c, dico q̄ illi duo casus noti uenient. Qua nanq; lege siue intra siue extra triangulū cadat huiusmodi perpendicularis præcedens & 31. huius indicabunt. Cadat itaq; primo intra triangulum duobus angulis b & c acutis existentibus. argumento igitur 13. secundi quadratū lateris a b superabit â duobus quadratis linearū a c & c b, in eo, quod fit ex b c in c d bis. cūq; tam quadratum a b notum sit ex hypothesi & prima huius, q̄ aggregatum ex quadratis a c & b c ex hypothesi, prima & tertia huius, erit per quartam huius, quod fit ex b c in c d bis notum, & eius dimidiū, quod fit ex b c in c d notum. est autem latus b c notum ex hypothesi, quare per 17. huius linea c d nota ueniet, alter uidelicet duorū casuum, quo dempto ex linea b c nota p hypothesim, reliquus casus b d innotescet. Qd si alter angulorum b & c obtusum se præbeat, perpendicularis a d trianguli ream transiliet, ad partem quidem anguli obtusi, qui uerbi gratia sit c, erit igitur p 12. secundi quadratum lateris a b maius duobus quadratis linearū a c & c b, in eo, quod fit ex b c in c d bis. Ex prius igitur adductis locis (ut breuis sim) excessus ille notus erit, scilicet, quod fit ex b c in c d bis, & eius dimidiū quod ex b c in c d. cunq; b c nota sit ex hypothesi, erit per 17. huius & c d nota, sic minorem duorum casuū notum eruisi sumus, cui si basim



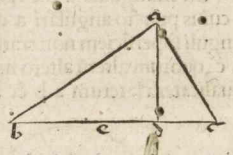


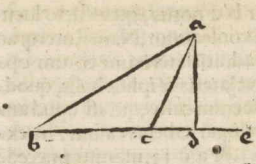
si basim b c notam adiecerís, resultabit casus maior b d notus, quæ fuere lucubranda. ¶ Operatio uaria processum huiusmodi consequitur. Nam si utercp; angulorum, quos basis sustinet, acutus fuerit, deme quadratũ lateris uni eorum oppositi ex aggregato duorũ quadratorũ reliqui scilicet lateris & ipsius basis, quodcp; relinquitur, dimidiatũ in basim partiaris, exibit enim casus, qui est apud angulum acutum prædictũ, quem ex basi minuendo, reliquũ habebis casum. In exemplo. Ponat quis mihi latus a b 20. pedum, b c 21. & a c 13. monitu præcedẽtis utrunq; angulorũ b & c acutum esse conijcio. quadrabo igitur a b, fiunt 400. quadratũ autem a c, quod est 169. coniungam quadrato b c, quod est 441. & resultabunt 610. à quibus demo quadratũ a b, manent 210. quorum dimidiũ 105. diuido per 21. exeũt 5. & tantus est casus d c, aufero 5 ex 21 numero basis, manẽt 16 pro casu reliquo. Quòd si alter angulorum prædictorũ obtusus extiterit, à quadrato lateris obtusum subtendentis angulum subtrahe aggregatũ quadratorum reliqui lateris & basis ipsius, quodcp; remanebit, dimidiatũ per basim partire, exibit enim casus minor, cui posteacp; basim adijciemus, emerget casus maior. Ponat in exemplo a b 51. b c 38. & a c 25. erit igitur angulus c obtusus, quadrabo a b, ueniunt 2601. quadrabo b c, exurgunt 1444. item quadratum a c est 625. colligo duo quadrata b c & c a, resultant 2069. quæ dempta ex quadrato a b, relinquunt 532. quorum dimidiũ 266 diuido per b c scilicet 38. exeunt 7. & tanta est linea c d, casus uidelicet minor, cui adiunge basim 38. congregantur 45 pro casu maiore.

XLIIII.

Quod præcedens docuit, alio tramite inuestigare.

Trianguli a b c tria latera supponantur nota, a b quidem longius latere a c, perpendicularis autem a d cadat intra triangulũ super basim b c, erit itaq; casus b d maior casu d c ex hypothesi, penultima primi & cõmuni animi conceptione, sit igitur e d æqualis ipsi d c ducta linea a e. Cum autem per penultimã primi quadratũ a b æquipolleat duobus quadratis a d & d b, quadratum uero a c duobus quadratis a d & d c, quadrato perpendicularis a d communi ablato, erit per cõmunem scientiam differentia quadratorum b d & d c æqualis differentiæ quadratorum a b & a c. duũ autem quadrata linearum a b & a c nota per hypothesim, ex quarta huius notam habebunt differentiam, quare & differentia quadratorũ b d & d c non ignorabitur, sed per sextam secundi quadratũ b d æquatur ei, quod fit ex e b in b c cum quadrato e d. differentia igitur quadratorum b d & e d siue d c est id, quod fit ex e b in b c, erat autem hæc differentia nota, quare quod fit ex e b in totam b c notum declarabitur. cuncp; ipsam b c notam attulerit hypothesis, erit per 17 huius ipsa b e nota, quam basi b c cognita dementes, lineã e c relinquemus cognitam & eius medietatem d c, quæ est casus minor. huic cum sit æqualis linea e d, si adiecerimus b e prius notam, casum maiorem b d scitum reddemus. Quòd si perpendicularis aream trianguli egrediatur, continuata basi b c, donec concurret cum perpendiculari in puncto d, ponatur ipsi c d æqualis d e. pristino igitur fretus argumento, confiteberis differentiam quadratorũ a b & a c æqualem esse differentiæ quadratorũ b d & d c, quam quidem differentiam hypothesis, prima & quarta huius latere non sinunt, quadratũ autem b d superat quadratum c d,





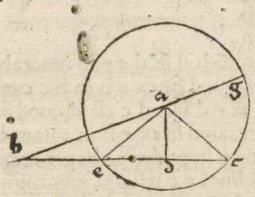
per 6. secundi in eo, quod fit ex c b in totã b e. q̃d igitur fit ex c b in totam b e, notum habebitur, est autem ipsa b c data per hypothesim, quare per 17. huius tota b e cognoscetur, ex qua si dempseris basim b c datam, residua c e nota uidebitur, cũ eius medietate c d. casum itaq; c d minorem enisi sumus, cui si basim adiunxeris datam, casus maior b d mensuratus emerget, quod decuit explanare. ◤ Operatio. Subtrahe qua dratum lateris minoris a quadrato maioris, relictoq; diuiso per basim, quod exibit ab ipsa basi minuas, si perpendicularis intra triangulũ ceciderit, aut ab eo quod exibit basim demas, si extra ceciderit, eius autẽ quod relinquitur dimidiũ, p casu minori teneto, cui si id, quod ex diuisione elicitum est, sociaueris, casum maiorem congregabis, perpendiculari quidem intra triangulũ cadente. sed si extra ceciderit, casum minorem cum basi summabis, resultabit enim casus maior quæsitus. In exemplo. Sit latus a b 20. a c 13. & basis b c 21. quadratũ de 13. est 169. quadratũ de 20. est 400. subtraho 169. à 400. manent 231. quæ diuido per 21. exeunt 11. hæc sublata ex 21. relinquũt 10. medietas de 10. est 5. tantumq; minorem pronuncio casum, cui adiectis 11. colligo 16. pro casu maiori, hæc dum perpẽdicularis intra. Sed extra offeratur latus a b 51. a c 25. & basis b c 38. quæ quidẽ perpẽdicularẽ extra triangulum cadere significant. subtrabo quadratum de 25. quod est 625. ex quadrato de 51. scilicet 2601. manent 1976. quæ diuisa per 38. elicium 52. à quibus demo 38. manent 14. quorum medietatem scilicet 7. casui minori deputabo. colligo 7 & 38. resultant 45. tantũ igitur maiorem enunciabo casum.

◤ Quod sub differentia laterũ & congerie cõmuni continetur, æquum est ei, quod sub differentia casuum atq; congerie eorum, scilicet ipsa basi continetur rectangulũ.

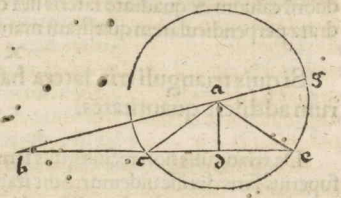
XLV.

Huiusmodi casus per alia media numerare.

Sit triangulus a b c non rectangulus trium notorum laterum inæqualium, à cuius puncto angulari a demittatur perpendicularis a d supra basim b c trianguli superficiem non transgrediens, quæ ex basi b c duos separet casus b d & d c, quorum alterũ altero maiorem esse in præcedenti conclusimus, propter inæqualitatem laterum a b & a c, hos casus mensurandos præstolamur. Super puncto a tanq; centro secundum quantitatem lateris minoris a c describo circulũ h e c, cuius circumferentia necessario secabit & basim b c, & latus a b, q̃ a c linea longior sit perpendiculari a d, breuior autẽ latere a b, secet itaq; basim b c in puncto e, quo cum centro circuli copulabo per lineã e a, lineam uero a b secet in puncto h. extendã deinceps b a ultra centrum circuli, donec occurret circumferentiæ eius in puncto g, erit igitur linea e d per tertiam tertij æqualis d c casui minori. & ideo linea b e est differentia casuum. Quoniã autem à puncto b extra circulum signato, duæ lineæ b g & b c productæ circulũ secent, erit per 35 tertij, quod fit ex g b in b h æquale ei, q̃d ex c b in b e, sed quod fit ex g b in b h, notum est per 16 huius, linea enim g b nota est cum sit æqualis duobus triangulí lateribus a b & a c per hypothesim datis, sed & b h differentia scilicet duorum laterum scita est per hypothesim & quartam huius



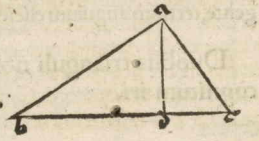
tam huius. quare & quod sub c b & b notum habebitur, cumq; lineam b e notã subiecerit hypothesis, erit per 17 huius linea b e nota, differentia scilicet casuum, qua dempta ex basi b c nota, relinquetur linea e c cognita, cuius medietas d c est casus minor. Item casui dicto minori lineam b e notam adijcias, & prodibit casus maior. Si uero perpendicularis extra triangulum ceciderit descripto circulo super capite ipsius perpendicularis secundũ quantitatẽ lateris minoris cõtinuet latus longius ultra centrum circuli, donec obuiabit circumferentiæ circuli in puncto g, quẽadmodum supra fecimus. Extendatur denicq; basis, ut in ea residere possit perpendicularis demissa, cõueniantq; perpendicularis ipsa & basis prolongata in puncto d. non tamen ibi sistat, sed procedat quousq; offendet circuli circũferentiã in puncto e, ducta semidiametro a e. prius igit freti syllogismo declarabimus quod fit ex e b in b c notum. cũq; ex hypothesi notam habeamus basim b c, erit per 17. huius linea e b (summa uidelicet duorũ casuum) nota: dempta ergo basi b c nota per hypothesim ex b e iã inuenta, residua c e nõ erit ignota. & eius medietas c d, casus scilicet minor. Item si basim b c casui minori iam noto adiunxerimus, casus maior b d notus conflabitur, quæ fuere depromẽda. ¶ Operatio. Aggregatum ex duobus lateribus per differentiam eorũ multiplica, productoq; p basim diuiso, quod exibit à basi subtrahas perpendiculari intra triangulũ cadente, aut basim ex eo quod diuisione facta elicitur minuas. residui enim dimidiũ erit casus minor quæsitus, cui si id quod ex diuisione elicitum est, addideris perpendiculari intra cadente, aut ei basim adieceris, si extra ceciderit perpẽdicularis, casum maiorem constitues. Verbi gratia. Sit latus a b 25. a c 17. & basis b c 28. congregabo 25 & 17, resultabunt 42. differentia duorũ laterũ est 8. multiplico igitur 42 per 8, producuntur 336. quæ diuido per 28. numerum scilicet basis, exeunt 12. subtraho 12. ex 28. manent 16. quorũ medietas est 8. Casus ergo minor erit 8. Itẽ addo 12. ad 8. ueniunt 20. & tantus habebitur casus maior. In hoc exemplo oportuit perpendicularem cadere intra triangulum. Sed offeratur mihi latus a b maius 26. a c 13. & basis 11. quo fit ut perpendicularis a d triangulũ egrediatur. Summa duorũ laterum est 33. differentia eorũ est 7. multiplico 33. per 7. producuntur 231. quæ diuido per 11. numerum scilicet basis, exeunt 21. à quibus minuo 11. manent 10. medietas de 10 est 5. tantusq; numerabitur casus minor. Item congregabo numerum basis 11. cum casu minori 5. redduntur 16. pro casu maiori. Triplicem igitur huiusmodi casus metiendi artem absoluimus. Nunc quid utilitatis ipsi afferant paucis lucubrabimus.



XLVI.

Perpendicularem à quouis puncto angulari ad oppositũm sibi latus protensam ex notis tribus trianguli lateribus reddere mensuratam.

Sit triangulus a b c, ex cuius puncto angulari a descendat perpendicularis a d ad basim b c, si intra triangulum ceciderit, aut ipsi basi quantũ oportet continuate occurrens, si extra triangulum prosiliet. Di-

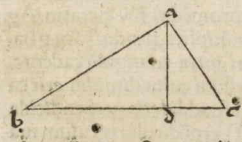


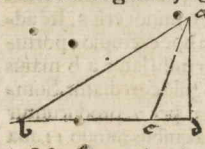
liet. Dico, ꝙ ipsa perpendicularis a d nota ueniet. Nam huiusmodi perpendicularis descendentē concludentur duo trianguli rectanguli, latus commune habentes, ipsam scilicet perpendicularem, quorum siniſter siniſtrū trianguli propoſiti latus, & caſum siniſtrum pro lateribus duobus reliquis accipit, dexter autē latus dextrū cum caſu dextro, quemadmodū in figura apparet. per 26. igitur huius, quæ expenultima primi pendet, perpendicularis a d nota ueniet, latere a b noto existente per hypotheſim, caſu autem b d per quamlibet trium præmiſſarum. Idem efficies ī triangulo a d c rectangulo usus fueris. ☞ Opus breue. Quadratum alterius duorū caſuum ex quadrato lateris ſibi cōterminalis minue, relicti enim radix quadrata perpendicularem quæſitam manifeſtabit.

XLVII.

Si quis trianguli tria latera habuerit cognita, trium eius angulorum addiſcet quantitates.

De triangulis non rectangulis ſermo futurus habebitur, de rectangulis enim ſuperius ſatis dixiſſe uidemur. Sint itaq; trianguli a b c tria latera nota, dico, ꝙ tres eius anguli non latebunt. Demittatur enim ex puncto a ad baſim b c ꝓpendicularis a d, quæ cadat, ne intra triangulum an extra ſuperiores docuerunt. Cadat primo intra triangulum, erit autem ipſa nota ꝓ præmiſſam, triangulus igit a d c rectangulus duo latera a d & a c nota habens, per 27. huius angulos ſuos acutos manifeſtabit. Similiter triangulus rectangulus a b d notos habebit acutos angulos. duobus autem angulis b & c cognitis, qui triangulis dictis rectangulis & propoſito noſtro triangulo a b c cōmunes ſunt, tertius angulus b a c per 25. huius non ignorabitur. omnes ergo angulos trianguli a b c notos effecimus. Cadat demum perpendicularis a d extra triangulum, argumentis igitur priſtinis duo anguli a b d & a c d noti declarabuntur. cunq; ex 13 primi duo anguli a c d & a c b duos rectos notos, per 21 & 3 huius ualeant, erit per 4 huius & angulus a c b cognitus, unde per 25. huius angulus b a c non ignorabitur. Poteris autem hæc breuius concludere, ſi loco perpendicularis duos caſus accēperis. Nam propter duo latera a b & b d nota ex hypotheſi, & aliqua trium concluſionū, quas de caſibus numerandis tradidimus, per 27 huius notus erit angulus b, ſimiliter propter latus a c notū ex hypotheſi, & caſum d c ſuperius numeratum, angulus c patefiet, duo autem anguli b & c cognīti, ſocium ſuum angulum a per 25 huius ſuſcitabunt. ☞ Ne autem æquo diutius obtundaris, operationem duabus ex rebus colliges, nam perpendicularem ex præmiſſa, aut utrunq; duorum caſuum ex aliqua trium præcedentium numeres, angulos autem triangulorum partialium rectangulorum, qui & triangulo ꝓpoſito cōmunes habentur, 27 huius non ſinet ignotos, qui tandem 25 huius diligente, tertium angulum elicient menſuratum.



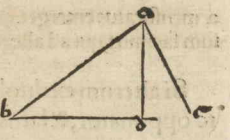


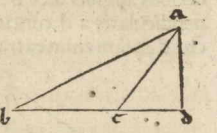
XLVIII.

Duobus trianguli notis angulis, laterum proportiones inuicem cognitum iri.

Trian-

Trianguli a b c duos angulos ſupponamus datos. Dico, ꝙ quorumlíbet duorum laterum proportío nota uídebítur. A communí enim termino duorum laterum, quorum proportíonem enítí uoles, demítte perpendicularem uerſus reliquū latus, quæ cadat ne íntra an extra triangulum ex angulís, quos baſis ſuſtentat, facíle doceberís, íllud autem proceſſum noſtrū non uaríabit, erít enim trianguli partíalis a b d rectanguli angulus b notus ex hypotheſí, iuuāte 25 huíus, ſi opus fuerít, quare per 30 huíus proportío a b ad a d nota accípietur. ſimílí argumento proportío a c lateris ad eandem perpendicularem nota declarabítur. utroq; ígitur laterum a b & a c ad ꝑpendícularem a d proportíonem habente, erít per 12. huíus eorum ínter ſe proportío nota. Símílíter procedémus círca duo latera quæcunq; elegerímus, quod exáct abſoluendum. ¶ Operatíoní autem ímmorarí non eſt conſílíū ípſam ením ex operíbus allegatorum theorematum facíle comparabímus.

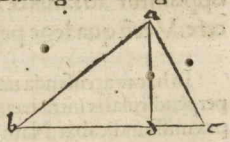


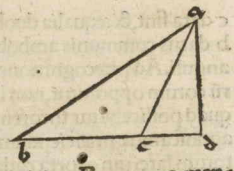


XLIX.

Si duo latera trianguli data notum ambiant angulum, reliquos angulos reliduumq; latus dimetiri.

Sínt duo latera a b & b c trianguli a b c, nota cum angulo quem ambíunt a b c. Dico, ꝙ latus a c notum erít cum duobus angulís reliquís. Demittā enim á uertíce anguli ígnotí ꝑpēdícularem ad látus ſíbí oppoſítum, quæ uerbí gratía ſít a d. nondum autem ex hypotheſí noſtra ſcíre poteſímus, cadat ne perpendícularís ílla íntra triangulum an extra, hoc ením non ſtatím conſequítur notícíā anguli, quem duo data ambíunt latera, níhílomínus metam attíngemus cupítam, & qua lege perpendícularís ípſa íncedat explorabímus. Cum ígitur triangulus a b d rectangulus angulum b acutum habeat datum ex hypotheſí cum látere a b, erít per 9 huíus utraq; línearum a d & b d cognita reſpectu lateris a b. ſí ítaq; b d iam ínuēta per ſyllogíſmū minor reperíetur baſí b c nota per hypotheſím, perpendícularem íntra triangulum cadere nemo dubítabit. ſí uero maíor fuerít baſí b c, cadet extra, & ſí æqualís, coíncídet perpendícularís a d cum látere a c, erítq; ꝓpter hoc triangulus a b c rectangulus. Sít ergo b d caſus prímo mínor baſí b c data, quo ablato ex b c nota, relínquetur per 4 huíus línea d c cognita. cunq; iam prídem a d perpendícularem notam concluſérímus, habebít triangulus a d c rectangulus duo latera a d & d c nota, quare per 26 huíus latus eíus a c notū elícietur, quod & triangulo noſtro cōmune eſt, ſed & angulus eíus acutus a c d árgumento 27 huíus ínuenietur. duobus autem angulís b & c cognítís, tertíus angulus a per 25 huíus latere non poterít. Quòd ſí línea b d maíor occurrat baſí b c, dempta ípſa baſí nota ꝑ hypotheſím ex línea b d ínuenta per argumentatíonem, manebít c d nota, deínde ut príus línea a c nota prodíbít cum angulo a c d, quem ſí ex duobus rectís abſtulerís, relínquetur per 13 prímí & 4 huíus angulus a c b cognítus, tandemq; ex 25 huíus angulus





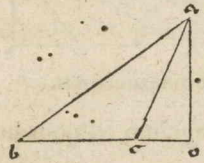
F a men-

a mensuratus emerget, quæ fuere lucubranda. ☞ Operationis uero tenorẽ missum facimus, qui ad allegata theoremata confugienti ultro se ingeret.

L.

Si alterum ex duobus notis lateribus trianguli, angulo obtuso dato opponatur, & latus & angulos reliquos non ignorabit Geometra.

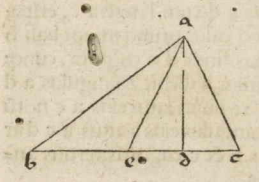
Duo latera a b & a c trianguli a b c nota sint, quorum alterum scilicet a b opponatur angulo a c b obtuso dato. Dico, ꝙ & latus b c cognitum ueniet cũ duobus angulis a & b. Ex termino enim communi datorum laterũ descendat perpendicularis a d, concurrens cum basi b c, quantum oportet prolongata in puncto d, ipsam enim extra triangulum cadere cogit 31 huius. Triangulus itaq; a c d angulum a c d notum habebit, ipse enim a c d angulus cum angulo a c b per hypothesim noto duobus rectis æquiualent, cũq; latus a c trianguli rectanguli prædicti notũ sit ex hypothesi, erit per 29 huius utraq; lineaꝝ a d & d c nota respectu lineæ a c. item, triangulus a b d rectangulus duo latera a b & a d nota habens, a b quidem per hypothesim, a d uero per argumentationẽ iam factam, ex 26 huius & 27 latus suũ b d notum afferet cum angulo b, quare dempta c d prius cognita ex tota b d iam nota, relinquetur basis b c nõ ignota. duo autem anguli b & c trianguli a b c, tertium angulũ a per 25 huius excitabunt. Verum igitur enunciabat theorema nostrum. ☞ Operationem ex eis, quæ circa triangulos rectangulos tradidimus, facile colligemus.



LI.

Trianguli duo latera data cum angulo acuto, cui alterum eorum opponitur, ad latus & angulos reliquos cognoscendos nequaq; sufficere. Verũ qua lege perpẽdicularis cadat, si callebimus, cĩa patefient.

In hac re accusanda uenit infirmitas anguli acuti, qui nequit docere cadat ne perpendicularis intra triangulum proposituꝫ an extra, quod obtusus angulus in præmissa indicabat. Nam sit triangulus a b c, cuius duo latera a b quidem maius, & a c minus sint data cũ angulo b acuto, sitq; angulus c acutus non datus, & à puncto a demittatur a d perpendicularis ad basim, quæ per 31 huius cadet intra triangulum, ex processu autẽ 45 huius, casus b d maior erit casu d c, abscinda tur ergo ex b d linea e d æqualis ipsi d c, ducta linea a e, quæ per quartã primi æqualis erit lineæ a c. Quãuis itaq; latera a b & a c trianguli a b c data sint, & æqualia duobus lateribus a b & a e trianguli a b e, angulus autẽ b datus communis ambobus triangulis, tamen bases eorum uarie sunt & reliqui anguli. Ad præcognitionem igitur duorũ laterum & unius anguli acuti, cui alterũ eorum opponitur, non ligatur noticia reliqui lateris & angulorũ reliquorum, quod pollicebatur theorema nostrum. ☞ Vt autem latus & angulos reliquos agnoscamus, præscindum est, qua lege perpendicularis à communi termino datorum laterum exorta cadat. Si enim intra triangulum cecíderit, triangulus a b d



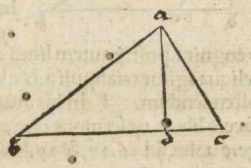
rectangulus

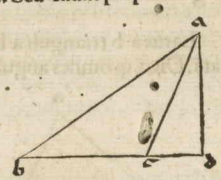
rectangulus habebit latus a b notum ex hypothesi cum angulo acuto b, quare p 29 huius tam perpendicularis a d nota uidebitur, cũ casus b d. Ex duobus autẽ lateribus a d & a c notis, trianguli a d c rectanguli per 26 & 27 huius linea d c inuenietur cum angulo c. duas igitur lineas b d & d c iam singulatim notos, si congregabimus, tota basis b c per 3 huius mensurata ueniet. duo etiam anguli b & c noti tertium angulum a 25. huius dirigente, cognitum elicient. Quod si perpendicularis a d extra triangulum ceciderit, oportuit angulum a c b esse obtusum, præmissam igitur consulendo, & basim b c & angulos reliquos trianguli nobis propositi metiemur. ☞ Opus autem cum & facile sit, & ex superioribus pendeat, missum facio.

LII.

Si latus trianguli datum duos sustentet notos angulos, reliqua duo latera non erunt ignota.

Sit triangulus a b c, latus a b datum habens, cui insideant duo anguli a b c & b a c noti. Dico, q duo eius latera reliqua fient cognita. Pro angulo autem tertio mensurando, non est terendus dies, quem 25. huius exemplo notũ afferet. Ab a termino lateris a b dati exoriat ppendicularis ad basim b c ignotã, quæ cadat ne intra triangulum an extra anguli, quibus subiacet basis, per 31. huius edocebunt. Cadat igitur prius intra triangulum, triangulus itaq; a b d rectangulus angulum b acutũ habens datum cum latere a b per 29. huius, reliqua duo latera sua a d & d b cognita afferet respectu lateris a b. item triangulus a d c rectangulus cum latus a d iam notum habeat, pari ratione sua latera a c & c d, manifestabit respectu perpendicularis a d notæ. cũq; perpendicularis a d data sit ad latus a b, erit & utraq; linearum a c & a d per 8. huius ad ipsum latus a b data. latus ergo a c trianguli propositi notum effecimus cũ duobus casibus b d & d c. quibus collectis b c basis cognita resultabit. Sed cadat perpendicularis a d extra triangulum, eritq; per media prætacta trianguli rectanguli a b d utrunq; latus a d & d b notum respectu a b. item triangulo a c d rectangulo angulum a c d notum habente propter duos angulos b a c & a b c notos ex hypothesi, quibus ipse per 32. primi æquipollet, cũ latere a d, per 29. huius, reliqua duo sua latera a c & c d cognita habebunt. Sic ergo latus a c trianguli a b c propositi notũ erit cum duobus casibus b d & d c, quorum minor ex maiore demptus relinquet basim b c notã, quod uolebamus explanare. ☞ Operatio autem ex allegatis comparabitur theorematibus.

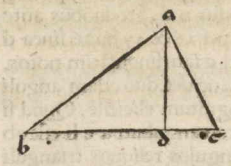




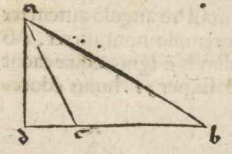
LIII.

Latus trianguli notum, quod alteri duorum datorum angulorum opponitur, reliqua suscitabit latera.

In triangulo a b c latus a b notũ angulo a c b dato opponatur, sitq; angulus a b c datus. Dico q reliqua duo latera non erunt ignota. De angulo autẽ ter



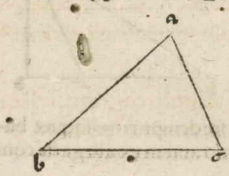
tio, quemadmodum in præcedenti, nihil ambigui nos uexabit. Lateri duobus datis subiacenti angulis insistat perpendicularis a d ex puncto angulari sibi opposito sumens originem, quæ qualiter cadet anguli dati 31. huius commonente exploratū reddent. Cadat igitur primo intra triangulū, ut fiat triangulus a b d rectangulus, qui cū habeat latus a b notum cum angulo a b d acuto, habebit & latus c d cognitum cum latere suo c d, 29. huius dirigente. Similiter triangulus a d c, cum & latus a d iam notum habeat, & angulū a c d ex hypothesi datū, duo latera sua reliqua a d & d c manifestabit. omnes igitur lineas b d, a d, a c & d c mensura una, per quā a b nota supponebatur, secundū numeros metietur notos, quare etiā linea b c ex duabus b d & d c notis resultās non erit incognita. Sed cadat perpendicularis a d extra triāgulum concurrens cum basi b c, quātum sat est continuata. Cum itaq; angulus a b c notus supponatur cum latere a b, erit per 29. huius triāgulo a b d rectāngulo existente, utraq; linearum a b & d b nota. Rursus in triāgulō a d c rectangulo, cum latus a d iā sit notum, angulus autem a c d propter uicinum suū a c b ex hypothesi notum 13. primi arguente, notus habeatur, erit per 29. huius utraq; linearum a c & c d respectu lineæ perpendicularis a d, & ideo respectu a b cognita. postq; autem lineā c d ex d b minuemus, relinquetur basis b c cognita, reliqua igitur trianguli a b c latera, notitiæ nostræ subiecimus, quod expectabat ostendendum. In his autem postremis conclusionibus operationem missam facere libuit, ne sermone obtunderemus nimio, quā quidem operationem, si colligere uoles, ad 26. 27. & 29. huius refugias.



LIIII.

Trium laterum trianguli inter se datis proportionibus, omnes eius angulos mensurare.

Latus a b trianguli a b c, tā ad latus eius a c, q̄ ad b c proportionem habeat datā. Dico, q̄ omnes anguli eius noti fient. Pro libito enim ipsum latus a b in q̄t-libet partes scindas, quarum ūna hoc in proposito mensura communis habebitur. cum itaq; a b latus sit notum per mensurā huiusmodi, erunt per 6. huius reliqua duo latera nota per eandem mensurā, & ideo per 48. huius triāguli a b c omnes anguli patefient, quod erat ostendendum. Operatio autem huius, postq; unum latus quodcunq; tanq; numerum notum pro libito posueris, & reliqua in de latera per opus sextæ huius didiceris, ab operatione 48. huius nō discrepat.

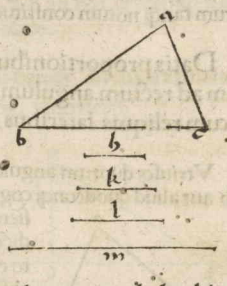


LV.

Tribus angulis trianguli cuiuslibet datas, inter se proportiones habentibus, unusquisq; eorum cognitus habebitur, latera quoq; inter se proportiones accipient notas.

Sit trian-

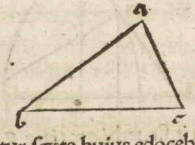
Sit triangulus a b c, cuius tres anguli inter se proportiones habeãt datas. Dico, ꝙ quilibet eorum notus erit, proportionesq; laterum inter se datas fieri oportebit. Quoniã enim anguli a ad angulum b data est proportio, sit ipsa ut numeri h ad numerum k (necesse em̃ est eã in numeris notis inueniri) & pportio anguli b ad angulum c nota. tanꝯ numeri k ad numerum l. cum itaq; proportio anguli a ad angulum b, sit sicut numeri h ad numerum k, erit coniunctim a & b angulorum ad angulum b sicut h & k numerorum ad k numerum, est autẽ b ad c sicut k ad k. per æquã igit a b ad c tanꝯ h k ad l, & coniunctim a b c ad c sicut h k l ad l. aggregati itaq; ex tribus angulis a b c ad angulum c est sicut aggregati ex tribus numeris h k l ad numerum l proportio. summa igitur trium angulorum a b c ad ipsum angulum c proportionẽ habet notã, summa autem huiusmodi per 32. primi duobus rectis æquipollet, quos oportet esse notos ex supradictis, unde & summa trium angulorum dictorum nota conuincitur, per sextam ergo huius angulus c notus declarabitur, qui cum ad reliquos angulos datas habeat proportiones, erunt & reliqui anguli ꝙ 6. huius noti. quare per 49. huius tria latera trianguli a b c proportiones inter se notas accipient, ambas ergo theorematis partes satis ostẽdisse uidemur ¶ Operatio. Tribus angulis tres accomodabis numeros, ita ꝙ primus angulus ad secundum se habeat sicut numerus primus ad secundum, secundus uero angulus ad tertium, sicut secundus numerus ad tertium, quod facile fiet, si operationem 19. huius consulueris, quo facto, summabis dictos tres numeros, & collectum ex eis numerum pro primo statuas, numerum uero anguli, quem nosse desideras, pro secundo, & numerum duorum angulorum rectorum pro tertio. multiplicando itaq; secundum per tertium, & diuidendo in primum, exibit quantitas anguli quæsiti. Vt si proportio anguli a ad angulum b fuerit sicut 10. ad 7. anguli autem b ad angulum c sicut 7 ad 3. colligo tres numeros 10. 7. & 3. fiunt 20. pro primo numero. libeat autem inuenire angulum a, cuius numerus est 10. quem pro secundo, numerus autem duorum rectorum usitatus est 180. multiplico igitur 180. per 10. producuntur 1800. quæ diuido per 20. exeunt nonaginta. angulum igitur a inuenio 90. gradus continentem, ut duo recti sunt 180. quare & ipse rectus habebitur. Repertis autem angulis ad operationem 49. huius confugiendum erit, ut proportiones laterum addiscamus.



LVI.

Data proportione duorum laterum, unoq; angulo cognito, reliqui duo anguli noti fiẽt. Vnde utriusq; dictorum laterum ad tertium proportio non latebit.

Sit proportio a b lateris ad b c latus trianguli a b c data, cum uno angulo quocunq;. Dico, ꝙ reliqui duo anguli noti uenient, & proportio utriusq; dictorum laterum ad tertium latus data erit. Diuiso enim ad libitum latere a b in quotlibet partes, una earum tanꝯ mensura communi utemur, quæ quoties in latere b c contineatur, sexta huius edocebit.

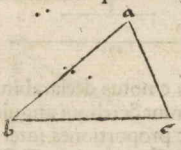


duo igitur latera a b & b c inter se data habebuntur, cunctq; angulus unus quicunq; per hypothesim datus sit, erit per 50. 51. aut 52. huius reliquum latus cognitum, quare per diffinitionem laterum omniū inter se proportiones habebimus datas, sed & per easdem reliqui anguli mensurabunt, quod intendebamus cōcludere. ☞ Operationem ex allegatis comparabimus locis, si prius alterum duorum laterum tanctq; notum constituerimus.

LVII.

Datis proportionibus duorum angulorum, utriusq; uidelicet seorsum ad rectum angulum, unoq; latere quolibet cognito, omnes anguli cum reliquis lateribus cognoscentur.

Vtriusq; duorum angulorum a & b ad rectum data sit proportio, sitq; latus a b aut aliud quodcunq; cognitum. Dico, q̄ omnes anguli trianguli a b c noti fient cum lateribus. Erit enim per sextam huius utercq; dictorum angulorum cognitus, recto per 21. huius noto existente, quare per 53. & 54. huius, quod reliquū est, absoluemus. ☞ Operationi autem nihil loci damus, q̄ ipsa ex supradictis facile decerpatur.



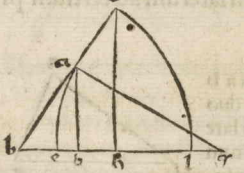
FINIS.

LIBER SECVNDVS TRIANGVLORVM.

I.

In omni triangulo rectilineo proportiō lateris ad latus est, tanctq; sinus recti anguli alterum eorum respicientis, ad sinum rectum anguli reliquum latus respicientis.

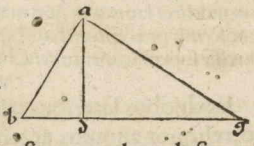
Sinum anguli, ut alibi uocamus, sinum arcus angulum ipsum subtendentis. Sinus autem huiusmodi ad unam & eandem circuli semidiametrum, siue ad plures, æquales tamen, referri oportebit. Sit igitur triangulus a b g rectilineus. Dico, q̄ proportio lateris a b ad latus a g est ut sinus anguli a g b ad sinum anguli a b g. item lateris a b ad b g tanctq; sinus anguli a g b ad sinum anguli b a g. Si enim triangulus a b g fuerit rectangulus, ex 28 primi huius comparabimus demonstrationem. Si uero non fuerit rectangulus, duo tamen latera a b & a g fuerint æqualia, erunt quoq; duo anguli eis oppositi, & ideo sinus eorū æquales, unde de ipsis duobus lateribus propositionem nostram uerificari constat. Quod si alterum altero longius extiterit, sit uerbi gratia a g lōgius, dirigaturq; b a usq; ad d, donec tota b d æqualis habeatur lateri a g; deinde super duobus punctis b & g factis centris, describi intel-



bi intelligantur duo circuli æquales secundum quantitates linearum b d & g a, quorum circumferentiæ occurrant basi trianguli in punctis l & e, ita, ut arcus d l quidem angulum d b l siue a b g, arcus autem a e angulum a g e siue a g b subtendat: ex duobus demum punctis a & d duæ perpendiculares a k & d h basi incidant: palã autem q d h est sinus rectus anguli a b g, & a k sinus rectus anguli a g b. est autem per 4. sexti Euclidis proportio a b ad b d, & ideo ad a g sicut a k ad d h. quare certum est, quod asserebat propositio.

II.

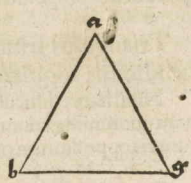
Cognito aggregato ex duobus lateribus trianguli, cũ duobus angulis sibi oppositis, unumquodq; trianguli latus secernere.



Triangulus a b g congeriem duorum laterũ a b & a g habeat datam, & utrunq; angulorum a b g & a g b notum. Dico, q tria latera eius inuenientur. Erit enim ex præcedenti proportio a b lateris ad latus a g cognita propter angulos datos, & ideo cõiunctim proportio b a & a g ad a g dabitur: cunq; congeries duorum laterum a b & d g sit nota per hypothesim, erit & latus a g cognitum, hinc & a b latus non latebit. ex hypothesi autem duo anguli a b g & a g b noti, latere non sinunt angulum q a g, sic demum ex duobus angulis b a g & a g b cognitis cum latere a b, tertium quoq; latus b g notum concludemus. Potest autem aliter, quanq; prolixius, idem absolui, si prius ex puncto a ad basim b g perpendicularem a d demiserimus: habebit enim triangulus partialis a b d rectangulus, angulũ a b d acutũ cognitũ, quare p 31 primi huius proportio a b ad a d nota prodibit: ex eisdem quoq; medijs proportio a g ad a d non latebit, utrũq; ergo duarum linearum a b & a g ad perpendicularem a d proportio nota conclamabitur: hinc per 28 primi huius earum inter se proportio scita veniet, & ideo coniunctim aggregati ex eis ad utranq; earum proportio notificabitur quãobrem utraq; earum nota prosiliet, hinc tandem linea b g, quemadmodũ in primo præcepimus, cognoscetur.

III.

In triangulo æquicruri, si unus angulus datus fuerit cum uno latere quocunq;, reliqua cognitum iri.

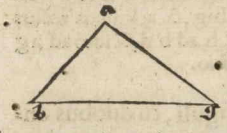


Quanq; in primo sufficienter hanc rem explicasse uidear, libet tamen paulisper circa triangulos æquicrures, & deinde circa triangulos uarios immorari: q ea quæ superius quærebantur breuiori tramite consequamur. Sit talis triangulus a b g, duo latera a b & a g habens æqualia, cuius unus angulus quicunq; sit datus cũ linea terali eius. Dico, q reliquæ lineæ eius notæ uenient. Erũt enim p 38 primi huius duo reliqui anguli cogniti. unde & per ante præmissam reliquæ lineæ faciliter notificabuntur. Sic absq; perpendiculari undecunq; ducta, propositum attingere didicimus. Quòd si unus angulus eius triangulorum duntaxat fuerit datus, proportionem laterum non ignorabimus, erunt enim per 35 primi huius & reliqui anguli dati: hinc & per ante præmissam uerum esse, quod asserebam confiteberis.

Si quis

IIII.

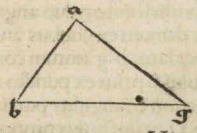
Si quis trianguli uarij duos angulos seorsum dederit cū uno latere eius quolibet, reliqua latera faciliter metiemur.



Det mihi quispiā duos angulos trianguli a b g tria latera inæqualia habentis, cum uno ipsorū laterū, uerbi gratia a b. Dico, ꝙ reliqua duo latera accipiet cognita. Nam 32. primi elementorū intercedēte tertius quoq; angulus innotescet: cunq; per antepræmissam proportio sinus anguli a g b noti ad sinum anguli a b g noti sit uelut lateris a b ad latus a g. tresq; harum quantitatum notæ sint, cui nisi prorsus ignaro quarta quantitas, uidelicet latus a g non manifestabitur? Idem eodemq; modo lateris b g cognoscendi præceptum habebitur. Hoc pacto perpendicularem undecunq; etiam duxisse superuacaneum censebitur.

V.

Ex duobus lateribus trianguli datis cum angulo alteri eorū opposito, reliquos angulos ac tertium latus notificare.



Sit talis triangulus a b g, duo latera a b & a g habēs cognita cum angulo a b g. Dico ꝙ reliqui duo anguli cum tertio latere suo innotescēt. Superiori enim freti syllogismo ex duobus lateribus a g & a b cognitis cum sinu recto anguli a b g noti per hypothesim, angulus a g b notus emerget. Hinc quoq; 32. primi ratiocinante tertius angulus b a g haud ignorabitur. Proportio autē sinus anguli a b g noti per hypothesim ad sinū anguli b a g noti per argumentationē est ut lateris a g ad latus g b. quare & latus g b non erit ignotum. Quāuis autem ex duobus lateribus a b & b g cognitis cū angulo b a g ab eis comprehenso aliter ꝙq; in primo reliquos angulos cum tertio latere dimetiendi sit potestas, quemadmodū nunc recitabitur. Non tamē per hāc uiam operandum suadeo. erit enim propter angulum b a g notum congeries duorū angulorū a b g & a g b cognita. cunq; proportio sinus unius eorū ad sinū alterius sit cognita: est enim sicut duorū laterum a b & a g proportio data, fieret per tertij uterq; angulorū a b g & a g b notus. Sed hæc uia nihil facilitatis addit, quare in tali proposito à primi recedere non licebit.

VI.

Triangulus trium notorum angulorū lateribus suis proportiones uendicabit cognitas.

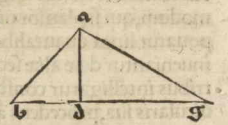
Nihil habet difficultatis hæc propositio, nisi 1. huius negligenter præterieris: nam quorumlibet duorum laterum ea erit proportio, quam habent sinus angulorum eis oppositorum ordine uidelicet præpostero, ut superius traditum est.

VII.

Data perimetro trianguli cū duobus angulis eius, unumquodq; latus seorsum cognoscere.

Congeries trium laterū trianguli a b g sit data cū duobus angulis eius a b g & a g b. Dico ꝙ omnia latera eius seorsum innotescent. Erūt cīm tres anguli eius noti,

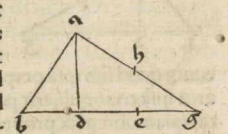
noti, quare per argumentionem sæpe adductam proportio a b ad a g nota erit, & ideo coniunctim aggregatū ex b a & a g ad lineā a g, ꝓportionē habebit notā. Itē ꝓportio a g ad g b nota erit, unde & ꝓportio b a, a g ad g b cognita, ꝓueniet, & ideo cōiunctim tota pimeter triāguli a b g ad lineā b g notā habebit, ꝓportionē. cūq; pimetrū ipsam dederit hypothesis, erit & linea b g cognita. hinc q̄q; reliqua duo latera nota declarabunt. Poteris præterea idē cōcludere ducta ꝑpendiculari a d; nam per 30 primi huius utriusq; linearum a b & a g ad perpendicularem a d proportio nota erit, quare earum inter se proportio manifesta habitur. item a b ad b d nota elicietur proportio, item ꝓportio a g ad g d similiter nota erit, unde & utriusq; duarum linearum a b & a g ad lineam b g proportio data proclamabitur: hinc ut prius congeries trium laterum ad ipsam b g lineam, proportionem habebit datam, cætera ut ante.



VIII.

Datis proportionibus trium laterum, perpendicularíq; nota, cuncta latera dimetiri.

Trianguli a b g bina latera proportiones habeant cognitas, sitq; perpēdicularis a d data. Dico, q̄ tria eius latera innotescent. Nam si duo latera a b & a g fuerint æqualia, erit b d æqualis ipsi d g, unde proportio a b ad b d cognoscetur: & ideo quadrati a b ad quadratum b d proportio scita ueniet: quare etiam euersim argumentādo quadrati a b ad quadratum a d nota dabitur proportio: cunq; quadratum a d sit notum, propter costam suā ex hypothesi datam, erit quadratum a b notum, & inde ipsa linea a b non ignorabitur, ex qua demum & proportionibus laterum p hypothesim datis, reliqua latera innotescent. Quod si alterum duorum laterum a b & a g altero maius extiterit, sit a b breuius: eritq; ob hoc casus b d breuior casu d g, abscindatur d e æqualis ipsi b d. ex processu igitur primi huius, quod fit ex e g in g b est æquale excessui quadrati a g supra quadratum a b, quorū, quidē, quadratorū ꝓportio nota erit, unde & diuisim eius, q̄d fit ex e g in g b ad quadratū a b, ꝓportio nota declarabit. Hæc aūt ꝓportio per 6. elementorū cōponit ex ꝓportiōe nota lineæ g b ad lineā a b. & ex ꝓportione e g ad a b, cūq; tā ꝓportio composita q̄ ipsa cōponens prima sint notæ, erit & reliqua componens nota: unde & proportio b e, & ideo medietatis eius b d ad lineam a b scita consurget quadratíq; a d ad quadratum b d innotescet, & ideo euersim quadratum a b ad quadratum a d notam feret proportionem: quadrato igitur a d noto redundabit quadratum lineæ a b cognitum, hinc ipsa a b lineæ cum reliquis trianguli lateribus innotescent.



IX.

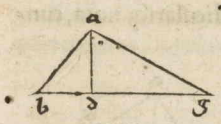
Ex proportionibus trium laterum trianguli, tres angulos eius inuestigare.

Resumpta priori figuratione concludemus propter hypothesim, ut in præmissa, proportionem a b ad b d notam, & ideo per primi angulus b a d, & inde angulus a b d cognoscetur, deinde propter angulum a b g iam notum cum proportione duorum laterum a b & a g data angulus a g b huius arguente innotescet.

tescet. hinc & tertius angulus non poterit ignorari. Habes tamen in primo alium modum, qui si planior uidetur, repetendus est. Si libeat aliter hanc absoluere exponatur linea quantalibet notæ quantitatis respectu perpendicularis a d, ad quã inueniantur duæ aliæ secundũ proportiones laterũ trianguli a b g datas: ex his tribus intelligatur constitutus triangulus, & per primi huius inueniatur perpẽdicularis sua, procedens à termino cõi duorũ laterum proportionaliũ duobus lateribus a b & a g. hæc enim perpendicularis secundi trianguli habebit se ad perpendicularẽ a d sicut latus quodlibet secundi trianguli notũ ad latus trianguli a b g sibi correlatiuum: cũq; tres huiusmodi quantitatum sint notæ, quartam cognitũ iri necesse est. Hæc trahuntur ex similitudine duorum triangulorum totalium atq; partialium, quam ex sexti elementorum facile est colligere.

X.

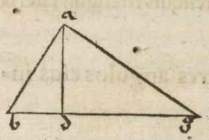
Data area trianguli cum proportionibus laterum, unumquodq; eorũ notificari. Vnde & angulos suos metiri licebit.



Repeto triangulum a b g cũ perpendiculari sua a d, quẽadmodũ apud huius figurauimus, ubi cõcludebat proportio a b ad perpendicularem a d notã: hinc & propter hypothesim perpendicularis a d ad basim b g & ideo ad eius medietatem habebit notam proportionem: cunq; quod sub ipsa perpendiculari & dimidia basi continetur, sit notũ, uidelicet area ipsa trianguli, erit per primi huius tã perpendicularis a d q̃ basis b g nota. quamobrem & propter datas laterum proportiones reliqua latera & tandẽ anguli ipsi non latebunt. Quod si modus ille uel prolixius nimium uel difficilis uideatur, alium aggrediaris: non dico tamen faciliorem, sed fortasse tibi magis placiturum. Ex tribus lineis quantiscunq;, notis per mensurã, ex qua area trianguli data surrexit, habentibus tamen proportiones ueluti tria latera trianguli propositi intellige constitutum triangulũ, cuius perpendicularem quamcunq; uoles per primi huius metiaris: quæ ducta in dimidiã basim sibi substratẽ suscitabit aream huiusmodi trianguli secundi cognitã: cunq; duo huiusmodi triangulos constet esse æquiangulos, erit area trianguli secundi ad aream trianguli primi, quæ iam notæ sunt, sicut quadratum lateris cuiuslibet secundi trianguli ad quadratum lateris sibi relatiui primi trianguli, unde quadratum illius lateris de primo triangulo, & ideo latus ipsum notificabitur, hinc quoq; reliqua non latebunt.

XI.

Data perpendiculari quacunq; cum duobus angulis trianguli quibuslibet omnia latera mensurare.

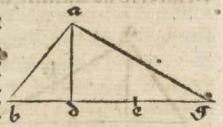


In triangulo a b g sit perpendicularis a d cognita cũ duobus angulis. Dico, q̃ omnia latera innotescent. Habebit enim triangulus a b d partialis rectangulus latus a d cognitum cum uno angulo acuto, nam duobus angulis triãguli a b g cognitis, tertius latere nõ potuerit. quare per primi huius utraq; linearum a b & b d mensurata ueniet. per eadẽ rursus media utranq; linearũ a g & g d metiemur: hinc tota b g, & ideo omnia latera trianguli propositi cognoscentur, quod erat explanandum.

Data per

XII.

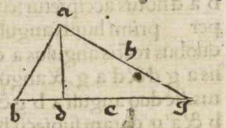
Data perpendiculari atq; basi, & proportione laterum cognitis, utrunq; latus cognoscere.



Hoc problema geometrico more absoluere nõ licuit hactenus, sed per artẽ rei & census id efficere conabimur. Habeat itaq; triangulus a b g perpendicularem a d, & basim b g cognitas, proportionem q; laterum a b & a g datam, quærimus utrunq; eorum. Sit uerbi gratia ꝓportio a b ad a g tanq; 3 ad 5. ita, ut latus a b sit breuius latere a g, quo demum euenit ut casum b d breuiorẽ casu d g nemo inficiari possit, sit ergo d e æqualis ipsi b d, deturq; perpendicularis a d 5, & basis b g 20 pedes. pono lineam e g 1 res, ita, unde linea b e erit 20. demptis duabus rebus, & eius medietas b d 10, minus 1 re, reliqua uero d g, erit 10 & una res. duco b d in se, producitur 1 census & 100, demptis 20 rebus, quibus addo quadratũ perpendicularis scilicet 25. colliguntur 1 census & 125. demptis 20 rebus. item b g in se, fiunt 1 census, 20 res & 100. quibus adiicio quadratum perpendicularis 25. colliguntur 1 census 20 res & 125. sic habebo duo quadrata linearum a b & a g, quorum proportio est ut 9 ad 25. duplicata scilicet proportio 3 ad 5, quæ erat ꝓportio laterum. cum itaq; proportio quadrati primi ad quadratum secundum sit tanq; 9 ad 25. si duxero 25 in quadratum primum, itemq; 9 in quadratum secundum, quæ producentur erunt æqualia, restaurans q; ut assolet defectibus, & ablatis æqualibus, utrobiq; perducemur ad 16 census & 2000 æquales 680 rebus: quamobrem quod restat, præcepta artis edocebũt. Linea ergo g e quam posui 2 res nota redundabit, hinc residua ex basi b e & eius medietas b d, quæ cum perpendiculari a d, latus a b notum suscitabũt, unde tandẽ & latus a g notum pronunciabitur, quæ libuit efficere.

XIII.

Cognito utroq; casuum, & proportione laterum data, quantitates laterum emoliri.

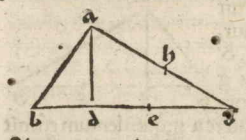


In triangulo a b g ducta perpendiculari a d, sit uter q; casuum b d & d g datus cum proportione laterum. Dico, q; utrunq; latus cum perpendiculari ipsa innotescent. Sit casus b d breuior, nam si essent æquales duo casus, latera quoq; haberentur æqualia, eorum tamen cognitio non consequitur casus datos & ꝓportionem laterum, quæ est æqualitatis. secetur ergo ex longiori casu linea d e æqualis casui breuiori: differentia quoq; duorum laterum sit h g. cum igitur ꝓportio a g lateris ad a b sit data, erit diuisim ꝓportio h g ad a h data, & ideo h g ad duplam ipsius a h scilicet congeriem duarum linearum a b & a h data erit: quare etiam coniunctim ꝓportio h g ad summam duorum laterum a b & a g non erit ignota. quod autem sub h g & duobus lateribus a b & a g cõiunctis continetur, æquum est ei, quod sub e g & g b. illud autem notum est, ꝓpter duos casus ex hypothesi notos, unde & per processum primi huius, quod sub h g & g a a b continetur, notum erit: cunq; proportio linearum hoc continentium sit nota, erit per primi huius tam linea h g cẽ congeries duorum laterum nota: hinc tandem dempta h g nota ex aggregato laterũ noto residui medietas pro latere breuiori reputabitur, unde & longius innotescet latus, quæ

tus, quæ fuere demonstranda.

XIIII.

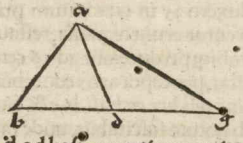
Si uterq; duorum casuum inæqualium datus fuerit, aggregatumq; ex lateribus datum, utrunq; latus secernere.



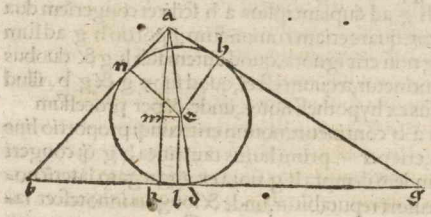
Resumo triangulum præcedentis, in quo datus sit uterq; casuum b d & d g, summaq; duorum laterum a b & a g sit nota. Dico, q; utrunq; latus agnoscetur. Erit enim quod fit ex e g in g b cognitum, & ideo quod fit ex h g in g a, a b coniunctim notum erit. cuiq; congeries ipsorum laterum sit data, erit per primi huius h g nota differentia scilicet laterum, quã si ex summa duorum laterum dempseris reliqui medietas quantitatem lateris minoris proclamabit. hinc quoq; reliquum latus non ignorabitur, quod erat absoluendum.

XV.

Basis trianguli data notum subtendens angulum cum aggregato laterum cognito, utriq; laterum & utriq; angulorum sibi oppositorũ uiam mensurationis aperient.



Triangulus a b g basim b g notam habeat cũ angulo b a g dato, sitq; congeries laterum a b & a g cognita. Dico, q; utrunq; latus eius cũ utroq; angulorum eis oppositorum innotescent. Diuidatur enim angulus b a g per mediũ demissa linea a d ad basim contingente in puncto d, erit igitur per tertiam sexti elementorum proportio b d ad d g sicut a b ad a g, & permutatim proportio a b ad b d sicut a g ad g d: quare per quinti elementorũ proportio aggregati ex lateribus a b & a g ad basim b g, sicut lateris a b ad lineam b d: cuiq; hæc proportio sit data est enim uterq; terminus eius datus, erit proportio a b ad b d data, sed & angulus b a d notus accipietur: cum sit medietas anguli b a g per hypothesim noti: quare per primi huius angulus a b d mensuratus habebitur: hinc quoq; reliquus de duobus rectis angulus a d b latere non poterit, qui cum sit æqualis duobus angulis a g d & d a g, & angulus d a g sit notus, erit residuus angulus d a g mensuratus. sic duo anguli a b g & a g b noti erunt. congeriem autem duorum laterum a b & a g d tam subiecit hypothesis: quare per huius quarti utrunq; laterum a b & a g notum pronunciabitur, quæ fuere declaranda. Illud autem aliter attingere poterimus hoc pacto. Inscribatur triangulo a b g circulus h n l, cuius centrum necessario erit in linea a d, quẽadmodũ ex quarti elementorum trahitur, q̃d sit e, â quo ad tria puncta cõtactuum h n & l, educantur tres semidiametri e h, e n & e l, deinde ex puncto a descendat perpendicularis a k occurrens basi in puncto l: oportet autem punctum k reperiri



periri in parte lateris a b, à linea diuidẽte angulũ per æqualia puncta b & d, si latus ipsum breuius fuerit latere a g: erit enim angulus a b g maior angulo a g b, & ideo duo anguli a b g & b a d, quibus æquipollet angulus a d g, maiores erũt duobus angulis d a g & a g d, scilicet angulo a d b, adiectis utrobiq; æqualibus angulis b a d & d a g: angulus ergo a d g maior, & angulus a d b minor recto conuincetur. hinc etiam costat semidiametrũ e l secuisse lineam b d, ducatur insuper linea e m æquedistans basis, & ideo perpendicularis ad lineam a d, præterea basim b g æqualem esse duabus lineis b n & g h, nõ negabis, si tertij elementorum satis didicisti, sublata ergo basi b g data ex congerie laterum data, relinquetur congeries duarum linearum a n & a h cognita, & ideo medietas eius scilicet linea a h mensurata: oportet enim duas lineas a n & a h circulũ contingẽtes esse æquales. triangulus ergo a e h rectangulus ex latere suo a h cognito cum angulo acuto e a h noto propter duplum eius notum, duo latera sua a e & e d cognita depromet. sic circuli triangulo proposito inscripti semidiameter nota colligetur, ex qua in medietatem perimetri trianguli notam resultat area trianguli nota: ex area autẽ nota & medietate basis, ppter hypothesim cognita per primi huius perpendicularis a k mẽsurata declarabitur, cui si lineã k m æqualẽ ipsi e l semidiametro circuli dempseris, relinquetur linea a m cognita, ex qua demum & linea a e superius nota, angulum e a m metieris, quo tandem sublato ex medietate anguli b a g dati scilicet ex angulo b a d, relinquetur angulus b a k notus, qui deinde angulum a b g latere non sinet: sed & duo anguli b a g & a b g tertium socium suũ angulum a g b notum suscitabunt, postremo igitur p. huius latera trianguli nota prosilient.

XVI.

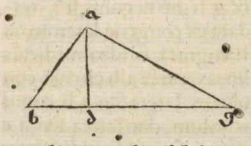
Data basi alicuius trianguli cum perpendiculari cui subsistit, & aggregato laterum cognito, utrunq; eorum secernere.

Hæc partim conuertit præcedentem, & ideo figuram suã resumet, ubi ex perpendiculari nota cum medietate basis aream trianguli metiemur, cunq; perimeter trianguli sit nota, erit semidiameter e n circuli sibi inscripti nota: linea quoq; a n nota proclamabit, ut in præcedenti: quare & linea a e & angulus e a n notificabuntur, unde & duplus angulus n a h siue b a g non latebit, k m autem æqualis semidiametro e l siue e n cognitæ cum perpendiculari a k per hypothesim nota, differentiam suam scilicet a m lineam notificabunt: quæ rursus cum a e prius cognita, angulum a e m notum reddent, æqualem uidelicet angulo a d b: ex duobus autem angulis n a e siue b a d & a d b cognitus, angulus quoq; a b d siue a b g notus declarabitur: erat autem b a g cognitus. quare residuus a g b non ignorabitur, & ideo per huius utrunq; latus notum enunciabitur, quod placuit determinare. Non autem necesse est perpendicularem a k intra triangulum cadere, sed contingit eam cadere extra triangulum, nonnunq; etiam coincidere lateri minori, si fuerint inæqualia latera, maiori enim coincidere non potest: huius rei indicia erunt talia. Si acciderit lineam a n suo modo repertam cum semidiametro circuli inscripti triangulo coniunctim æquales esse perpendiculare a k datæ, necessario perpendicularis dicta coincidet lateri a b, id est, oportuit angulum a b g trianguli propositi esse rectum: si uero tale aggregatum minus fuerit, ipsa perpendiculari datæ signum est eam intra triangulum cecidisse, & si maius extra. super hoc autem demonstrationem conscribere non est consilium, cum facile quidem

le quidem sit, parum autem utilitatis adducat: tuo igitur quod reliquum est seruatur ingenio, figuræ præterea aliter cadenti demonstrationē suam, nisi rudissimus fueris, accomodare poteris.

XVII.

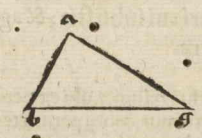
Datis duobus angulis & uno casu quocunq; omnia latera cum perpendiculari manifestare.



Sit triangulus a b g qualis proponitur, in quo p̄ pendicularis a d duos casus ex basi distinguat b d & d g: quorum alter uerbi gratia b d sit cognitus cū duobus angulis trianguli a b g. Dico, q̄ omnia latera sua notitiā non fugient. Erunt enim per hypothesim 32. primi elementorum suffragante tres anguli trianguli a b g cogniti, quare triangulus partialis a b d rectangulus angulum a b d acutum habens notum cum latere b d, reliqua duo latera sua a b & a d per primi huius notificabit: hinc in triangulo a g d partiali angulum a g b acutum habente notum cum latere a d, utraq; linearum a g & g d innotescet per eandem primi huius: collectis ergo duabus a d & d g, resultabit tota basis cognita, & problematis integra consummabitur intentio.

XVIII.

Data proportione duorum laterū trianguli cum angulo alteri eorum opposito, reliquos duos angulos mensurare.



Talis esto triangulus a b g, cuius duo latera a b & a g, p̄portionem habeant notā, sitq; angulus a b g datus. Dico, q̄ reliqui anguli non latebunt. Erit enim per huius, p̄portio a g lateris ad a b tanq; sinus anguli a b g ad sinum anguli a g b, tribus autem harum notis existentibus quarta quātitas nota ueniet. inde ergo angulus a g b notificabitur, & tandem tertius b a g angulus latere nō poterit. Constat denicq; utrunq; laterum a b & a g ad ipsam basim b g notam habitum ire proportionem, si supra memorata repetieris, quod quidem corollarij uice habuit annectere.

XIX.

Datis duobus casibus cū differentia laterū utrūq; eorū percontari.

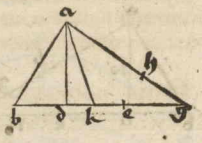
Est enim quod sub differentia casuum & ipsa basi continetur æquale ei, quod sub differentia laterum atq; ipsorum congerie continetur: eo igitur cognito & differentia laterum data per primi huius congeries laterum mensurabitur: unde etiam utrunq; eorum notitiæ subijcietur.

XX.

Si quis differentiam laterum dederit, differentiamq; casuum cū angulo quē basis subtendit, omnia latera cognita recipiet.

Esto triangulus a b g, in quo perpendicularis a d duos casus b d & d g secernat, quorum differentia e g sit data: differentia etiam laterū quæ sit h g nota suppona-

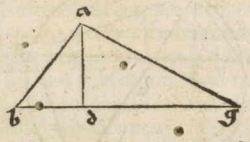
ponatur cum angulo b a g. Dico, ꝙ omnia latera & omnes anguli cognoscendi uenient. Descendat nanq; ex uertice trianguli â linea a k, diuidens angulum b a d per æqualia: erit itaq; ꝓportio a g ad g k, sicut duarum b a, a g coniunctorum ad basim b g, quemadmodum superius in huius ratiocinati sumus: ꝓportio autē b a, a g ad basim b g est, ut e g ad h g per primi huius, & secundā partem sexti elementorum, quæ cum sit nota ꝓpter terminos suos ex hypothesi datos, erit & proportio a g ad g k cognita: cunq; angulum b a g dederit hypothesis, erit eius medietas g a k cognita, quare per corollarium huius angulum a g k siue a g b notum comparabimus, & ideo tertius angulus b a g trianguli ꝓpositi non latebit. inde quoq; per huius proportio a g laterís ad latus a b scietur, & diuisim proportio hæ differentiæ laterum notæ ad latus breuius a b nota erit, unde & latus a b & tandem reliqua omnia ex supra dictis cognoscemus.



XXI.

Datis duobus lateribus trianguli cuiuslibet cum proportione casuum, quantitatem basis agnoscere.

Sint duo latera a b & a g trianguli a b g cognita, proportio'q; casuum b d & d g sit data. Dico, ꝙ basis ipsa nota proueniet. Est enim differentia quadratorum a b & a g nota ꝓpter hypothesim, æqualis differentiæ quadratorum b d & d g, quemadmodū in huius ostēdimus, cunq; proportio casuum sit data, erit & ꝓportio quadratorum suorum data: & diuisim differentia huiusmodi quadratoꝝ ad quadratum casus minoris b d notam habebit proportionem, cūq; differētia ipsa sit nota, erit & quadratum casus minoris cognitum, unde & casus ipse minor & deinceps reliquus innotescent, tota igit basis nota elicietur. Non mireris autem, ꝙ hactenus ut plurimū perpendicularem intra triangulū cadere supposuerim, quāuis nonnunq; extra triangulum cadere contingat, habet enim hoc omnis triangulus infallibiliter propriū, ꝙ ab aliquo punctorum eius angularium ad latus sibi oppositū ducibilis est perpendicularis una intra angulum ipsum casura. Qd si extra triangulum perpendicularis ceciderit, paucis rebus mutatis & cognitu facilibus, quicquid facto opus est, cōsequeris: nolem equidem ingenium tuum pauculis quibusdam inueniendis non fatigari.



XXII.

Datis duobus casibus cum proportione laterum, utrunq; eorum dimetiri.

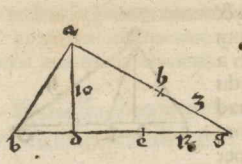
Hæc uidetur conuertere præcedentem, deductionem autem eam prorsus habet quā præcedens, quāobrem tanq; satis lucubratā tibi relinquo.

XXIII.

Data differentia duorum laterum, differentiaq; duorum casuū cū ipsa perpendiculari cognita omnia latera propalare.

Sit talis triangulus a b g, cuius duo latera a b & a g differentiā habeant notā h g, ductaq; ꝑpendiculari a d duorum casuum b d & d g, differentia sit e g: hæ

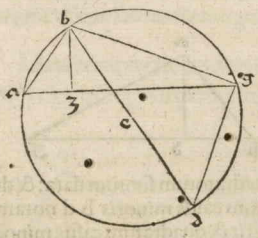
duæ diffe-



duæ differentiæ sint datæ, & ipsa perpendicularis a d data. Dico, ꝙ omnia latera trianguli nota concludentur. Per artem rei & census hoc problema absoluemus. Detur ergo differentia laterum ut 3, differentia casuum 12. & perpendicularis 10. pono pro basi ūnā rem, & pro aggregato laterum 4 res, nā proportio basis ad congeriem laterū est ut h g ad g e, scilicet unius ad 4. erit ergo b d $\frac{1}{2}$ rei, minus 6, sed a b erit 2 res demptis $\frac{1}{2}$. duco a b in se, producuntur 4 census & 2 $\frac{1}{4}$. demptis 6 rebus. itē b d in se facit $\frac{1}{4}$ census, & 36 minus 6 rebus: huic addo quadratum de 10 qui est 100. colliguntur $\frac{1}{4}$ census & 136 minus 6 rebus, æquales uidelicet 4 censibus & 2 $\frac{1}{4}$ demptis 6 rebus. Restaurando itaq; defectus, & auferendo utrobiq; æqualia, quemadmodum ars ipsa præcipit, habebimus census aliquot æquales numero, unde cognitio rei patebit, & inde tria latera trianguli more suo innotescēt.

XXIIII.

Datis tribus lateribus trianguli rectilinei, diametrum circuli eum circumscribentis inuenire.

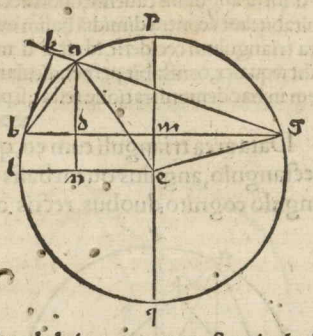


Hæc tametsi de angulis trianguli inueniendis nihil proponat, utilis tamen sequentibus uidebit. Sint tria latera a b, b g & g a, trianguli a b g nota, quærimus diametrum circuli eum circūscribentis. Esto circulus huiusmodi a b g d, oportet autem duos angulos quicunq; fuerint trianguli a b g esse acutos, qui sint, uerbi gratia, a & g, quos facile cognosces, si primo triangulorum libello satis incubuisti: demittaturq; à puncto b perpendicularis b 3, & diameter circuli prædicti b e d, cuius terminus d copuletur puncto g per lineā d g. habes itaq; duos triangulos a b 3 & b d g æquiangulos, uterq; enim angulorum b 3 g & b d g in circumferentia consistens suscipit arcum b g, sed uterq; angulorum a 3 b & b g d rectus est: a 3 b quidem ex dispositione figuræ, b g d autem ex dispositione & 30. tertij elementorum, quare & tertius tertio æqualis cōuincetur: unde & per quartā sexti proportio 3 b ad b g est ut a b ad b d. tres autem harum notæ sunt, duæ scilicet a b ad b g per hypothesim: perpendicularis uero b 3 ex primi huius inuenitur, ergo & quarta, quæ est diameter circuli, nota ueniet, quod expectabas ostendendum. Elegimus autem duos angulos acutos, ut perpendicularis intra triangulum coartaretur facilitatis gratia, nam si caderet extra, parumper uariandus esset processus. Quòd si acciderit quadratum alicuius trium laterum quadratis duorum reliquorum laterum simul iunctis æquiualere: uerbi gratia, quadratum a g æquari duobus quadratis linearum a b & b g, erit a g diameter circuli circumscribentis triangulū, neq; ampliori quæsito opus est: fiet enim per ultimā primi elementorum angulus a b g rectus, & ideo per cōuersionem 30. tertij a b g semicirculus habebitur, & a g diameter circuli, quod erat exequendum.

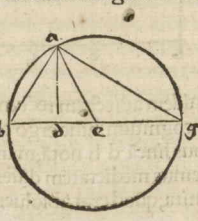
XXV.

Si basim trianguli notam acceperimus cū perpendiculari siue area trianguli, eum quoq; quem basis subtendit angulum datum habuerimus, utri

mus, utriuſcꝫ lateris noticiam extemplo reddemus.



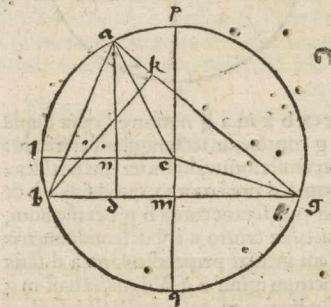
Sit triangulus a b g, baſim b g notam habens cum perpendiculari a d, ſiue cum area ſua, nã alterum ex altero pendet: ſit quoꝫ angulus b a g datus. Dico ꝙ utrunꝫ laterum eius noticiã attingemus. Detur enim angulus b a g obtuſus, extendaturꝫ g a donec perpendicularis b k ex puncto deſcenſura reſidere poſſit in eadem, erit itaꝫ propter angulum b a k notum proportio a b ad b k nota per huius: proportio autẽ a b ad b k eſt tanꝫ eius quod a b & a g ad id, quod ſub b k & a g continetur, quare & illa proportio nota erit: quod autem ſit ex b k in a g notum eſt, quia duplũ areæ trianguli, igitur & quod ſub a b & a g continetur, rectangulum erit notũ: exarata demum circulo triangulũ a b g circumſcribente, diameter eius notificabitur ex præcedenti propter perpendicularem a d notã cum eo, quod ſub a b & a g continetur noto: huiuſmodi diameter ſit p q, ſecans cordã b g per medium, & ideo orthogonaliter in puncto m, eductiſcꝫ ex centro e tribus ſemidiametris e g, e a & e l, quæ æquediſtet cordæ b g, cui incidat perpendicularis a d ſatis prolongata in puncto n. propter ſemidiametrum igitur e g & dimidiã baſi m g notas cum angulo e m g recto, notificabitur linea e m, cui æqualis eſt ipſa d n: hinc tota a n cognita reſultabit, quæ deinceps auxilio ſemidiametri e a notæ, angulo apud n recto exiſtente, ſuſcitabit lineã n e cognitã, cui æqualis habetur linea d m, qua dempta ex dimidia baſi b m, relinquetur caſus minor: ea uero adiecta, reſultabit caſus maior cognitus: hinc ex caſibus notis & perpendiculari a d latera duo cognita fient. Hæc autẽ ſi tenent, quandò dũorum, latere a b & a g alterum altero maius extiterit, cuius rei indicium erit, ſi linea d n ex perpẽdiculari uidelicet a d & linea m e reſultãs, minor fuerit ſemidiametro: ſi enim eſſet æqualis ſemidiametro, duo latera a b & a g neceſſario fuiſſent æqualia, unde etiã perpẽdicularis a d diuiſiſſet baſim per æqualia: ſic ex perpendiculari nota cum dimidia baſi reſultaret utrunꝫ latus cognitum. In his rebus demonſtrandis non ſiſto gradum, cum facilia admodum oſtenſu reputentur. Si autem angulus b a g fuerit rectus, erit b g neceſſario diameter circulo triangulum b a g circumſcribentis, cuius medietati æqualis ſi fuerit perpendicularis a d data, erunt duo latera trianguli æqualia, utrunꝫ uidelicet corda quadrantis, unde facillime cognoſcetur. Si uero perpẽdicularis fuerit minor dimidiæ baſi, erũt duo latera inæqualia, educta igitur ſemidiametro e a, quæ eſt æqualis dimidiæ baſi, nota erit d e, hinc ut prius utercꝫ caſuum cum utroꝫ laterũ innoteſcent. Quòd ſi angulus b a g acutus offeratur, erit portio b a g maior ſemicirculo, & ideo ſemidiameter e l ſecabit perpendicularem: quare cæteris omnibus ut antea procedentibus, niſi ꝙ perpendicularis b k intra triangulũ cadit, lineã d n æqualem ipſi e n ex perpendiculari a d nota minuemus, inuentamꝫ tandem lineam



d m, ex dimidia basi dememus, ut relinquatur casus minor, perpendiculari saltem a d intra angulum cadente, quod accidit, dum linea d m minor dimidia basi resultabit: aut econtra dimidiã basim ex linea d m minuemus, si perpendicularis extra triangulum ceciderit, id est, si d m dimidiã basim superauerit, quæ duæ si fuerint æquales, constabit perpendicularem a d coincidisse lateri breuiori: quod autem in hac demonstratione restat, si pauculum habes ingenium, eniti poteris.

XXVI.

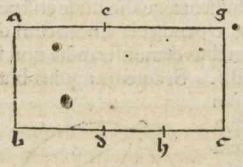
Data area trianguli cum eo, quod sub duobus lateribus continetur rectangulo, angulus quem basis respicit, aut cognitus emerget, aut cũ angulo cognito duobus rectis æquipollebit.



Resumptis figurationibus præcedẽtis, si perpendicularis b k uersus lineã a g, præcedens, extra triangulum ceciderit, erit per ea, quæ in præcedenti commemorauimus, proportio b k ad b a nota, & ideo per primi huius angulum b a k notum accipiemus, sic angulus b a g cum angulo b a k noto duobus rectis æquiualebũt. Si uero perpendicularis b k intra triangulum ceciderit, quemadmodũ in tertia figuratione præcedentis cernitur, erit ut prius a b ad b k notã habens proportionẽ, & ideo angulus b a k siue b a g notus concludetur. At si perpendicularis b k coinciderit lateri a b, necesse est angulum b a g fuisse rectum, & ideo cognitum, quod quidem accidit, quando area trianguli propositi æquatur ei, quod sub duobus lateribus eius continetur rectangulo.

XXVII.

Data differentia duarum linearum, quæ rectangulum spaciũ continent notum, utrangz earum dimetiri.



Sint duæ lineæ a b & b c inæquales, rectangulum spacium a c continentes notum, sitq; differentia earum d c cognita. Dico, q; utraq; earum nota reddet. Erit enim quod fit ex d b in b c parallelogramũ rectangulũ notum, q; b d sit æqualis ipsi a d: diuisaq; d c differentia per medium in h, erit quadratum lineæ d h cognitum, quod quidem adiectum rectangulo a c noto, per sextã secundi conficiet quadratum b h cognitum: hinc ergo costa sua scilicet linea b h notificabitur, ex qua si reiecerimus lineã d h notã, manebit b d, & ideo ipsa a b nota: sed & eidẽ b h notæ ademus medietatem differentiæ, scilicet lineam h c notam, ut resultet tota b c cognita, quod erat absoluendum.

XXVIII.

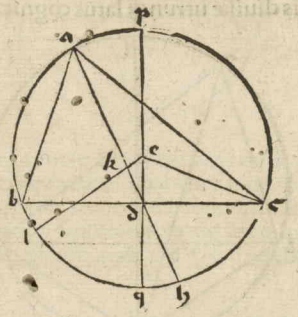
Data area trianguli, & angulo quem basis respicit cognito cum differentia laterum, utrunq; eorum innotescet.

Per mo-

Per modum enim circa huius explanatum concludemus, quod sub duobus lateribus cõtinetur cognitum: cunq; differentiã eorum notã attulerit hypothesis, erit per præcedentem utrunq; eorum cognitũ, cuius gratia fatigati sumus.

XXIX.

Si ab angulo trianguli noto descendat linea quædam cognita, basim datam diuidens per æqualia, utrunq; latus, reliqui etiam anguli non erunt ignoti.

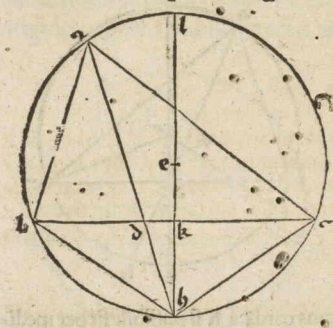


Sit triangulus a b c, angulum b a c notum habens, à cuius uertice a descendat linea a d nota respectu basis b c, quã per medium scindit in puncto d. Dico, q utrunq; laterum a b & a c notum uenient cum reliquis duobus angulis. Circumscribo enim huic triangulo circulum a b h c super centro e, cuius diameter p q p̃ punctum d transeat, orthogonaliter secans ipsam b c datam lineã: continueturq; linea a d, donec occurret circumferentiæ circuli in h, educantur denicq; duæ semidiametri e c quidem cõterminalis duobus lateribus trianguli propositi: e l autem secans cordã a h si possibile sit per medium & orthogonaliter: erit itaq; angulus c e d æqualis angulo b a c dato, & ideo per primi huius propter angulum apud d rectum, proportio d c notæ ad lineam d e nota erit, quare linea d e nota habebitur. est autem quadratum lineæ b d notæ, ppter hypothesim æquale ei, quod fit ex a d in d h per tertij elementorũ, cunq; a d sit nota, erit & d h inde quoq; nota a h cum eius medietate a k non ignorabitur: hinc residua k d scita dabitur. ex duabus itaq; lineis d e & d k cũ angulo k recto per primi huius cognoscetur angulus d e k, & ideo arcus l q notus accipietur, propter triangulum autem d e c notorum angulorum linea d c, & ideo etiam dupla eius b c respectu semidiametri circuli e c notam habebit proportionem, unde & corda a h, quæ nota prius erat respectu lineæ b c, iam respectu diametri circuli huius cognita dabitur: unde & per tabulam sinuũ aut cordarum arcus a b h innotescet. oportuit autem arcum b q c esse notum propter angulum b a c datũ, dempto igitur arcu l q prius noto ex arcu b q scilicet medietate arcus b q c, relinquetur arcus b l notus, qui deinde reiectus ex arcu a l scilicet medietate arcus a l h, manebit arcus a b notus, cui si addideris totum arcum b q c notum, resultabit arcus a b c cognitus: horum duorum arcuum cordas ex tabula colligemus, sic duo latera trianguli propositi respectu diametri circuli nota uenient: erat autem & basis b c respectu eiusdem nota, unde & ipsa latera respectu basis mensurata habebunt longitudines, angulos autem trianguli propositi reliquos latere non sinunt duo arcus a b & a c, in quos ipsi cadunt supra circumferentiam consistentes. Contingit autem lineam a h esse diametrum circuli, quod quando fiet, iam cõmemorata satis edocebunt, concluximus enim tam ipsam a h, cp̃ diametrum circuli respectu basis b c notam habere quantitatem. Poterit etiam quispiam dare angulum b a c rectum, unde basis b c fieret diameter circuli, & a d semidiameter: tunc autem problema erit uarium, nisi alia quædã

conditio accesserit. In hac autem figuratione angulum b a c acutum subiecimus: qui si obtusus offerretur, quãuis figuratio paulisper uariaretur, processus tamen idem fermè ad intentum nos perducet.

XXX.

Si quis triangulus duo latera habeat inæqualia, à quorum communi termino descendat linea angulum per æqualia diuidens, basim autem per inæqualia, sitq; ipsa linea diuidens nota cum portionibus basis diuisæ utrunq; latus cognitum iri.

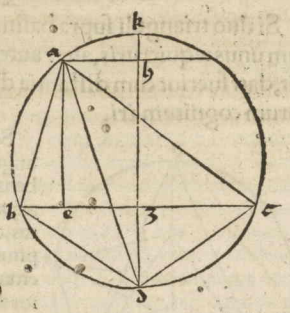


Sit talis triangulus a b g, cuius latus a b breuius latere a c: à cuius angulo a descendat linea a d nota, angulum quidē b a c diuidens per medium, basim autem in duas partiales a d & d c notas. Dico, q; utrunq; laterum a b & a c innotescet. Circumscribatur enim huic triangulo circulus a b h c centrum e habens: protensaq; à h usq; ad occursum circūferentiæ in h, ducantur cordæ b h & c h, quas cōstat esse æquales, propter angulum b a c per æqualia diuisum. ducatur rursus diameter circuli l h, quæ cum diuidat arcum b c per medium, diuidet etiam per tertij cordam eius b c per æqualia, unde & per tertij orthogonaliter eam secabit. cū autem utraq; linearum b d & d c sit nota, erit per tertij sexti & primi huius linea d h nota: est autem & d k cognita uidelicet differentia dimidiæ basis & minoris sectionis: angulo igitur k recto existente, linea k h per primi huius nota pronunciabitur, ex qua demum & dimidia basi cognita, nisi primi huius mentiatur, utraq; cordarum b h & h c æqualium nota resultabit. quadrangulum itaq; a b h c circulo inscriptum, duas diametros a h & b c notas habebit, quod autem sub eis continetur, æquū est duobus rectangulis, quorum alterum sub b h & a c, alterum sub h c & a b continetur: hoc enim alibi demonstratum est. Hæc autem duo rectangula parallelograma æquantur ei, quod sub b h & congerie duorū laterum continetur, propter æqualitatem linearum b h & h c. quod igitur sub b h & aggregato latērum a b & a c continetur, erit cognitum: unde & propter lineam b h cognitā primi huius ratiocinante, cōgeries duorum laterum nota proueniēt. est autē, portio b d ad d c sicut a b ad a c per tertiā sexti, & cōiunctim b c ad c d sicut congeries duorū laterū ad ipsum latus a c: cunq; tres huiusmodi quantitatū sint notæ, erit & quarta scilicet linea a c inuenta: unde & reliquum latus a b non poterit latere. hæc pro lateribus cognoscendis, ad angulos autem inueniendos, iam paratum habes iter, si huius intento tuo accomodaueris.

Poterimus 30 huius aliter absoluere hoc pacto. Sit triangulus a b c, aream habens notam cum basi b c & angulo b a c. Dico, q; utrunq; laterū a b & a c notum prodibit. Intelligo enim huic triangulo circumscriptū circulum a b d c, in quo produco cordam a l æquedistantem ipsi b c, & diametrum d k utriq; dictarum cordarum perpendiculariter incidentem: huic quidem in puncto 3, illi autē in puncto h: sitq; a e perpendicularis ac b c, si oportuerit prolongatā. quoniā igitur aream trianguli cum basi b c notam subiecimus, erit perpendicularis a e

scita,

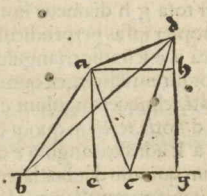
scita, ipsa enim in basim dimidiam ducta, conficit aream trianguli datã: hinc æqualis 3 h, ob eam rem non erit ignota. propter angulum autem b a c & ideo arcum b c cognitum, erit corda b c cognita per tabulam sinuũ aut cordarum respectu diametri circuli: unde & sagitta 3 d eadem relatione nota fiet: cum autem perpendicularis a e cognita habeatur respectu cordæ b c, erit & ipsa respectu diametri circuli nota, & ei æqualis 3 h: tota igitur sagitta d h respectu diametri circuli nota consurget, & ideo arcus a d cognitus dabitur, à quo si dempsero arcum b d, medietatem scilicet arcus b c pridem noti, relinquetur arcus a b notus: hinc corda a b cognoscetur respectu diametri circuli, & consequenter respectu lineæ b g. arcus denique a b iam notus arcui b ç adiectus, totum arcum a d c cognitum sustcitabit, & ideo corda eius respectu diametri circuli, tandemque respectu lineæ b e manifestabitur. Angulos autem a b c & a c b propter arcus a b & a c iam notos nemo ignorabit.



XXXI.

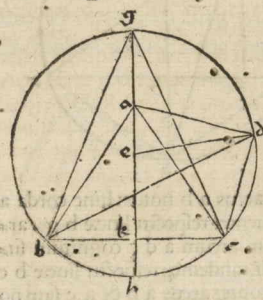
Duobus triangulis supra basim unam notam constitutis, binaque latera æqualia ac cognita habentibus, quantum uertices eorum distent inquirere.

Supra basim b c notam constituantur duo trianguli a b c & d b c, quorum utriusque latera sint cognita: ducatur linea a d uertices eorum coniungens, quã præsens quærit problema. Ex uerticibus a & d duæ descendant perpendiculares ad basim, si opus fuerit, satis extensam, quæ sint a e & d g, has perpendiculares quo pacto inuenias, superius cõmemoratum est; si igitur fuerint æquales, distantia duorum uerticũ erit per primi elementorũ æqualis lineæ e g, quæ est aggregata ex duobus casibus e c & c g in hac figuratione, quos superius mensurare docuimus: unde & distantia uerticum nota erit. Si uero perpendiculares nõ fuerint æquales, à summitate minoris earum quæ sit, uerbi gratia, a e, ducatur a h æquedistans basi, & occurrens reliquæ perpendiculari in puncto h, quæ nota erit quoniã æquali lineæ e g aggregato duorum casuũ: lineam quoque d h non ignorabit Geometra, cum h g sit æqualis a e perpendiculari notæ: hinc & ppter angulum a h d rectum primi huius ratiocinãte, linea a d latere nõ poterit, quæ hactenus quærebatur. Ad lineã autem a h cognoscendã nõ semper oportebit collígere duos casus, quemadmodũ in præsentiarum iussimus: sed nonnunquam alterũ ex altero demi, ut relinquatur linea e g siue a h cognita, & sicut hic cõiunximus casum minorem unius trianguli minori casui alterius, ita interdum casum minorem unius maiori casui alterius coniungere opus erit: quod quando fiet, tuo ingenio relinquitur discernendum.



XXXII.

Si duo trianguli supra basim unam notam constituti fuerint, quorum unus æquicruris, alter autem uarius, & anguli, quos basis subtendit, dati fuerint cum distantia duorum uerticum suorum, bina latera eorum cognitum iri.



Supra basim datam b c constituantur duo trianguli, a b c quidem duo latera a b & a c habens æqualia, d b c autem duo latera habens inæqualia, & sit uterq; angulorũ b a c & b d c datus, ductaq; linea a d distantia scilicet duorũ capitum sit data. Dico, q utriusq; eorum duo latera erunt data. Sit enim pro libito angulus b a c maior angulo b d c, demittaturq; ex puncto a perpendicularis ad basim cõmunem, quæ necessario diuidet basim per æqualia, quod fiat in puncto k: hæc perpendicularis intelligatur utrinq; indefinitæ quantitatis: circuli itaq; circumscripti triangulo d b c circumferentia secet eam superius in g, inferius autem in puncto h: constabit itaq; lineam g h esse diametrum huius circuli per corollarium primæ tertij, in qua sit centrum circuli e: ductaq; semidiametro e d & duabus cordis g b & g c, erit angulus b g c æqualis angulo b d c: cũ igitur uterq; triangulorum a b c & g b c æquicrurium habeat angulum notum cum basi data, erunt per primi huius bina latera eorum nota cum perpendicularibus suis: unde etiam tota diameter g h nota fiet, quadratum enim dimidiæ basis k c notæ æquatur ei, quod fit ex g k iam nota in k h, hinc k h & consequenter tota g h diameter nota uenietur: dempta autem differentia perpendicularium g a propter ipsas perpendiculares cognita ex semidiametro g e nota residuabitur linea a e scita: sic triangulus a e d tria latera nota habens, angulum suum e a d cognitum efficiet, ex quo demptus angulus e a c notus, quoniã medietas b a c data, relinquet angulum c a d mensuratum: is demum cum duabus lineis c a & a d notis, tertiam quoq; c d manifestabit. Item dimidius angulus b a c, qui est b a k adiectus angulo e a d prius cognito, conflabit totum angulum b a d notum, qui cum duobus lateribus a b & a d iamdudum cognitus, lineam b d suscitabit notam: sic ergo duo latera trianguli d a c dimensi sumus, quod libuit attingere. Paulo aliter ratiocinabimur circumferentia circuli b c d g secante perpendicularem infra punctum a, quod reuera contingit, dum angulus b d c maior angulo b a c oblatus fuerit. Quòd si duo dicti anguli æquales subijciãtur, circumferentia circuli b c d g per punctum a transeat necesse est: cognita igit diametro circuli ut antea, itemq; duabus lineis a b & a d, quæ erũt cordæ dicto circulo inscriptæ, non erit difficile mensurare utranq; cordarũ b d & c d, si circa cordas circuli inueniendas parumper exercearis. quod igitur in hac re supereſt, tuæ relinquimus industriæ.

XXXIII.

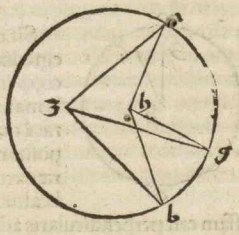
Si cuiuslibet trianguli angulum per æqualia diuidat linea ad basim notã descendens, fuerintq; sectiones basis inæquales notæ: itemq; angulus acutus, quẽ linea diuidens, cum ipsa basi continet notus datus, utrunq; latus trianguli cognitum reddetur. In trian-

In triangulo a b g ducatur linea a d, diuidens angulum quidem b a e per æqualia, basim autem b c notam per inæqualia in puncto d: sitq; utraq; sectionum b d minor & d c maior data cum angulo a d b acuto. Dico, q; utrunq; latus cognoscetur. Oportet autem angulum a d b, quemadmodum cõmemorauimus, esse acutum propter b d minorem sectionẽ cui insidet, erit enim tertia sexti ratiocinante a b minor a c, & ideo angulus a b c maior angulo a c b conuincetur. angulus a d c ualet duos b a d & a b d. item angulus a d b æquiualet duobus a c d & d a c: cunq; angulus b a d sit æqualis angulo c a d, resultabit angulus a d c maior angulo a d b, & ideo hic quidem obtusus, ille uero acutus enunciabitur. Circumscribatur ergo triangulo a b c circulus a b h c, reliquaq; disponantur quemadmodũ in huius: ex angulo itaq; a d b siue h d k noto cũ angulo k recto, & linea d k differentia dimidiæ basis datæ & minoris sectionis, utraq; linearum d h & h k nota proueniet, cum angulo d h k: deinceps utraq; linearum b h & h c propter dimidiam basim notam cum linea h k cognita dabitur: cunq; quod sub duabus b d & d c continetur sit æquale ei, quod sub a d & d h continetur: tres autem harum sunt notæ, erit per & primi huius linea a d nota, sic duas diametros a h & b c quadrangulo a b h c circulo inscripti notas habemus: unde & reliqua sicuti in huius absoluere licebit.

FINIS.

LIBER TERTIVS
TRIANGVLORVM.

Si sphæra plano secetur, communis sectio superficiei sphæricæ & plani secantis erit circumferentia circuli. Vnde constabit pedem perpendicularis à centro sphæræ ad superficiem secantem descendentis circuli huiusmodi centru messe.

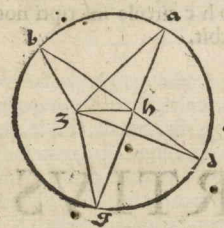


Cõmunis sectio superficiei sphæricæ & plani eam secantis sit linea a b g, quam dico esse circumferentiam circuli. Planum enim secans aut per centrum sphæræ incedit, aut non. Si p centrum eius, quoniã omnes rectæ lineæ à centro sphæræ ad ipsam sectionem cõmunem in plano huiusmodi eductæ, æquales sunt, diffinitione sphæræ id confirmante, manifestũ q; planum intra lineam a b g conclusum est circulus, ipsaq; linea a b g circumferentia eius. Si uero planum prætereat centrũ sphæræ, demittatur à centro sphæræ, quod sit 3, ad ipsum planum perpẽdicularis recta linea 3 h, à cuius pede scilicet puncto h, lineæ rectæ quotlibet educantur ad sectionem præ dictam

dictam, sintq; tres huiusmodi h a, h b & h g, protractis semidiametris sphæræ 3 a, 3 b & 3 g. Trium itaq; triangulorum a h 3, b h 3 & g h 3 unusquisq; angulum iuxta 3 rectum habet, propter lineam 3 h perpēdiculariter plano inciden tem, latera autem rectos angulos subtendentia, sunt semidiametri sphæræ æquales. dempto igitur quadrato perpendicularis singulatim â quadratis semidiametrorum remanebunt per penultimā primi & cōmunem scientiā quadrata trium linearum h a, h b & h g æqualia: unde & lineas ipsas æquales esse oportet. Non aliter, pbabis alias lineas quotlibet â puncto h ad sectionem cōmunem eductas sibi & tribus lineis iam memoratis æquales esse. diffinitio igitur circuli theorematis concludet ueritatem. ☞ Ex his aūt & diffinitione centri trahitur pedem demissæ perpendicularis esse centrum circuli iam dicti, quod pollicebaī corollariū.

II.

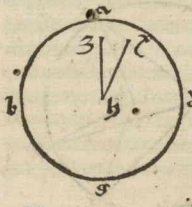
Omnis linea recta à centro sphæræ ad centrum circuli minoris in ea producta, perpendicularis est ad superficiem ipsius circuli.



Hæc conuertit corollarium præcedentis. Sit circulus minor a b g d in sphæra signatus, cuius centrum h, quod cum cum centro sphæræ 3 copulabo per lineam 3 h. Dico, q̄ linea 3 h perpendicularis est ad superficiem huius circuli. Productis enim duabus semidiametris a g & b d circuli minoris, terminos eārum centro sphæræ copulabo per semidiametros sphæræ a 3, b 3, g 3 & d 3. per diffinitionē igitur circuli & sphæræ linea 3 h cōmuni existente ex 8 primi omnes anguli, quos facit linea 3 h cum lineis sibi in superficie circuli minoris conterminalibus sunt recti. quare linea 3 h perpendiculariter incidit duabus diametris a g & b, & ideo per 4. undecimi perpēdicularis est ad superficiem circuli a b g d, quod libuit deducere. Q̄d autem linea â centro sphæræ superficiei circuli minoris perpendiculariter incidens, ad centrum ipsius circuli minoris terminetur, ex processu primæ huius satis didicimus.

III.

Linea recta, quæ à centro circuli in sphæra positi, orthogonaliter egreditur, centrum sphæræ necessario continebit.

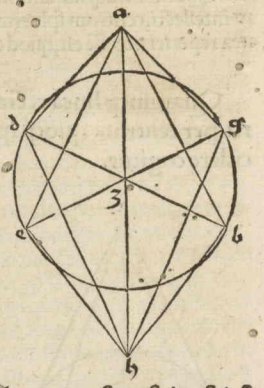


Sit circulus in sphæra a b d g, cuius centrum h, â quo egrediatur orthogonalis linea h k utrumq; indefinita. Dico, q̄ in ea centrum sphæræ reperietur. Si enim circulus ille maior extiterit, cum centrum eius sit centrum etiā sphæræ, â quo orthogonalis ipsa nascitur, planum est quod p posuimus. Si autem fuerit circulus minor, & centrū sphæræ extra orthogonalem, sententia quidem aduersarij habeatur, sit ipsum x, producta igitur linea x h, per præmissam erit perpendicularis ad superficiem circuli a b g d. ab uno itaq; puncto h superficiei a b g d duæ orthogonales egrediuntur, quod est impossibile, & contra undecimi, quo interempto, relinquitur ueritas conclusionis nostræ.

Omnis

IIII.

Omnis linea recta à polo circuli ad eius centrum demissa, perpendicularis ad superficiem circuli conuincitur, productaq; ultra circuli centrum, donec superficiei sphæricæ obuiabit, reliquum circuli polum offendet.



Sit circulus d e b g, cuius quidem polus sit a punctus, centrum uero 3, demittaturq; à polo a ad centrum 3 linea a 3 quã dico esse perpendicularem ad superficiem circuli. Duarum enim diametrorum d b & e g terminos cum puncto a copulabo per lineas a d, a e, a b & a g, quo fit, ut trianguli a b 3 & a d 3 bina latera sint æqualia, a 3 enim commune est ambobus, 3 b autem & 3 d sunt semidiametri eiusdem circuli, duas demum bases a d & a b æquales affert poli diffinitio. quare angulus a 3 d æqualis est angulo a 3 b, & ideo a 3 perpendicularis est ad lineam d b. Similiter probabimus eandẽ a 3 perpendicularem esse ad lineam 3 g. cum itaq; triũ linearum conterminaliũ una duabus reliquis ortho gonaliter insistat, erit ipsa perpendicularis ad superficiem reliquarum duarum argumento 4. undecimi. hæc autem superficies est ipse circulus d e b g, primam igitur theorematis partem ostendisse uidemur. Secundæ uero parti assentiemur, si linea a 3 usq; ad punctũ superficiei sphæricæ h producta, ipsum h punctum omnium diametrorũ terminis coniunges. omnes enim facti trianguli, quibus uertex cõmunis est, centrum circuli 3 bina latera habẽt æqualia, h 3 enim commune, reliqua uero sunt semidiametri eiusdem circuli, sed & anguli eorum apud punctum 3 æquales sunt, quia recti: quare bases dictorum triangulorum uniuersæ æquabuntur, per diffinitionem igitur h punctus circuli dicti polus habebitur, quod erat lucubrandum.

V.

Omnis recta linea à centro circuli in sphæra orthogonaliter exiẽs, per polos eius utrinq; continuata transibit.

In figuratione præhabita intelligatur lineam 3 a orthogonaliter à centro circuli 3 exiuisse, reliquis ut antehac conseruatis. Dico, duo puncta a & h esse polos circuli d e b g. Quia enim linea a 3 orthogonalis est ad superficiẽ circuli, per centrum eius transiens, erit ipsa per conuersionẽ diffinitionis orthogonalis ad omnem circuli semidiametrũ. posito igitur quadrato 3 a communi, cum omnia quadrata semidiametrorũ sint æqualia, erunt per penultimã primi & cõmunem animi conceptionem quadrata omnium linearũ ab a puncto ad circumferentiã circuli demissarum æqualia, & ideo ipsæ lineæ æquales. per diffinitionem ergo poli constabit ueritas propositionis. Idem similiter concludere de puncto h licebit.

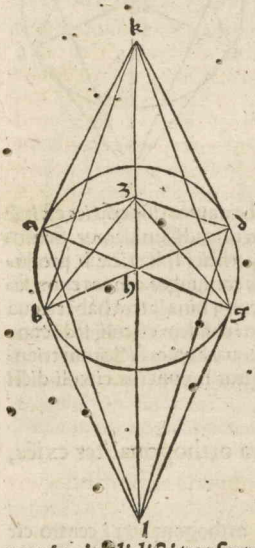
VI.

In linea recta centrũ sphæræ cũ centro circuli minoris in ea signati cõtinuãte, si quãtũ oportet utrinq; plõgeẽ, ipsius circuli polos iueniri

Circuli minoris a b g d in sphæra constituti cētrum sit h, quod cum centro sphæræ 3 continuetur per lineam h 3. Dico, q̄ in linea h 3 quantū sat est prolōgata, duos polos circuli a b g d reperiemus. Erit enim per 2 huius linea h 3 per pendicularis ad superficiē circuli dicti, quare per tertiā huius utrinq; continuata, donec superficiei sphæricæ occurret ad duos circuli memorati polos terminabitur. Quatuor itaq; huiusmodi puncta, centrum uidelicet circuli minoris in sphæra intellecti, centrum sphæræ & duos circuli minoris polos in una semper recta linea reperiri necesse est, quod erat explanandum.

VII.

Quæcunq; linea recta per polos circuli in sphæra signati transiuerit, per centrum quoq; ipsius transire, ipsiq; circulo orthogonaliter incidere cogitur.



Figuratio 7. & 8.

Linea k l transiens per duos polos k & l circuli a b g d, secet eum in puncto 3. Dico, q̄ punctus 3 sit centrum circuli a b g d, & q̄ linea k l orthogonaliter incidat circulo a b g d. A puncto enim 3 egrediantur plures q̄ duæ rectæ lineæ ad circumferentiā circuli dicti, quæ sint 3 a, 3 b, 3 g & 3 d, quarum terminos utriq; polorum connectemus per lineas polares duplices concludendo quatuor triangulos uerticem cōmunem habentes polum k, bases autē quatuor polares lineas à polo l deriuatas, quo fit, ut anguli eorum apud polum k 8. primi arguente, æquales habeātur. angulus uidelicet a k l æqualis angulo b k l, & ita de cæteris. Trāsferamus nos demum ad quatuor triangulos, quibus latus k 3 cōmune est, reliqua uero latera æqualia habentes quatuor scilicet polares lineas ab ipso polo k descēdentes, qui cum angulos suos apud k æquales habeāt, quemadmodum ostendimus per 4. primi, & bases habebunt æquales, lineas uidelicet 3 a, 3 b, 3 g & 3 d. quare per 9. tertij punctus 3 erit centrum circuli a b g d. primam igitur theorematis partem roborauimus. unde & per quartam huius secundæ partis assentire compellimur, linea k l per polum centrumq; circuli dicti transeunte, quæ uolebamus declarare.

VIII.

Linea recta quæ per duo quatuor punctorum dictorum incedit, reliqua duo præterire non poterit.

Quatuor illa puncta notamus centrum sphæræ, centrum circuli minoris in ea & duos polos eius. Sit itaq; circulus minor in sphæra quatuor characteribus a b g d repræsentatus, cuius centrum h, duoq; poli k & l, centrum autem sphæræ sit 3. Dico, q̄ linea recta duo eorum quæcunq; continens, & reliqua duo, si satis porrecta fuerit, complectetur. Nam, ut à capite initium sumamus, polum k & centrum sphæræ 3 in linea k 3 statuamus, extensaq; k 3 occurrat circulo a b g d in

puncto

puncto h, cui nondum nomen centri imponimus, producantur deniq; lineæ polares k a, k b, k g & k d, itē semidiametri sphæræ 3 a, 3 b, 3 g & 3 d, sed & lineæ a h, b h, g h & d h, satis tamen erat trinas huiusmodi non quaternas producere. quatuor igitur trianguli in uertice k cōmunicantes, quorum bases sunt quatuor semidiametri sphæræ, cum sint æquilateri per diffinitionem sphæræ & poli, linea k 3 cōmuni existente, per 8. primi erunt æquianguli, postea uero q̄ angulos eorum apud k æquales esse didicimus ad quatuor triangulos, quibus & dicti anguli cōmunes sunt, bases autem quatuor in puncto h confluentes, transeundum est, qui cum bina latera, quatuor dictos æquales angulos ambientia, habeāt æqualia per diffinitionem poli, linea k h cōmuni existente, per quartā primi bases habebunt æquales. à puncto igitur h plures q̄ duæ lineæ æquales exeunt ad circumferentiā circuli a b g d: quare per 9. tertij h centrū erit circuli prædicti, & ipsum est in linea k h indeterminata, in qua cum habeatur etiam centrum sphæræ, concludimus per præmissam reliquū quatuor punctorum uidelicet polum l in ea reperiri. Ponantur demum duo puncta, k polus, & h centrum circuli minoris in linea k h, erit itaq; per 4. huius linea k h perpendicularis ad superficiem circuli a b g d, quare per tertiam & quintam huius reliqua duo puncta, centrum uidelicet sphæræ & polus l in linea k h indefinita reperientur. Qd' si duos polos k & l in linea k l statuerimus, conclusionem nostram probaturi quatuor puncta a b g d ipsi polo l per lineas suas, quemadmodum figura docet, connectemus. quæ cū sint æquales diffinitione poli id exigente, similiter & quatuor lineæ polares à polo k deriuatæ, sibi inuicem æquentur, linea k l cōmuni existente quatuor triangulis a k l, b k l, g k l & d k l, erunt quatuor eorum anguli apud polum k æquales. Rursus propter angulos huiusmodi æquales, lineasq; polares superiores æquales, linea k h communi assumpta, ex quarta primi quatuor bases a h, b h, g h & d h æquales conuincemus. per 9. igitur tertij h centrum erit circuli a b g d: unde & per supradicta centrum sphæræ in ipsa linea k l necessario reperietur. Postremo in linea 3 h, quemadmodū ex præmissa trahitur, necessario reperiuntur duo poli circuli a b g, sed in linea 3 l continebitur, & centrum circuli h & polus eius k, quod non aliter q̄ de linea k 3 confirmandum erit. similiter quod circa lineā k h diximus, lineæ quoq; l h attribuemus. Ex quatuor autem sæpedictis punctis nō nisi sex eliciunt cōbinatiōes quas enumerauimus, uerū igit' est q̄d ꝓposuimus.

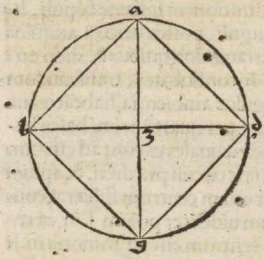
IX.

Circulum in eadem sui parte duos habere polos est impossibile.

Quilibet circulus ex sphæra ipsum continente duas scindit partes, quarū unā supra, reliquā autē infra se relinquit. Dico itaq;, q̄ in neutra illarum duos circuli unius polos reperire est possibile. Nam si ita opinaberis, cōtinuemus ipsos cū centro circuli per duas rectas lineas, erit igitur utraq; earum orthogonalis ad superficiem circuli per huius. cumq; ab uno puncto scilicet centro circuli exurgant, mē tietur nobis undecimi Euclidis, quod est inconueniens. Non ergo uerum est q̄d putabas. Sonat autem hæc conclusio de polis in superficie unius sphæræ signādis, nō enim me latet eundē circulū in multis contineri posse sphæris se secantibus, in quarum superficiebus licebit ex eadem etiam parte circuli multos assignare polos. quotquot autem signaueris polos, huiusmodi una linea recta orthogonaliter à centro circuli egrediens, omnes eos complectetur.

X.

Si lineam polarem circulus quispiam diametro sphæræ potentialiter subduplam habuerit, ipse circulus maior erit.



Sit a polus circuli in sphæra signati, cuius linea polaris a d quadratum habeat subduplũ quadrato diametri sphæræ. Dico, ꝙ circulus ille erit maior. Ducatur enim ab a polo per centrum circuli dicti, quod sit 3 linea a 3, quæ continuata occurrat superficiei sphæræ in puncto g, erit itaq; a g diameter sphæræ, nam per quartã & tertiam huius ipsa incedit per centrũ sphæræ. Intelligatur deinceps superficies plana transiens per lineas a d & a g, secando sphæram. fiet autem cõmunis sectio circumferẽtia, circuli quidem ex prima huius, magni uero per diffinitionem, habebit enim & centrum & diametrum sphæræ. diameter autem circuli in sphæra signati sit linea d 3 b, & linea polaris secunda g d. Quoniam igitur quadratum a g duplum est quadrato a d per hypothesim. quadratũ autem a g duobus quadratis linearum a d & d g æquale est per penultimã primi, ꝙ angulus a d g in semicirculo rectus sit, erit quadratum a d æquale quadrato d g, & ideo linea lineæ æqualis. uterq; autem angulorum a 3 d & g 3 d est rectus per 4. huius & diffinitionem lineæ perpendicularis ad superficiem, linea igit d 3 communi, erit per penultimã primi & cõmunem scientiã quadratũ a 3 æquale quadrato 3 g, & ideo costa a 3 costæ 3 d æqualis. est autem a g diameter sphæræ, ut supra declarauimus, necessario igitur 3 centrum circuli signati erit centrum sphæræ: per diffinitionem itaq; circulus ille maior est. Quandocunq; ergo linea polaris circuli cuiusdã potentialiter subdupla est diametro sphæræ, aut æqualis costæ quadrati magno circulo sphæræ inscriptibilis, ipse circulus maior est, quod expectabas declarandum.

XI.

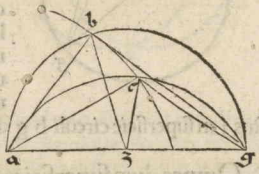
Omnis circulus maior in sphæra lineam polarem utranq; habet potentialiter subduplam diametro sphæræ, æqualemq; lateri quadrati, quod ipsi circulo magno inscribitur. Vnde manifestum est arcum circuli magni, à polo ad circumferentiam circuli signati demissum, esse quadrantem circumferentiæ suæ.

In figura præcedentis addo duas lineas a b & b g, intelligendo 3 centrum & lineam b 3 d diametrum circuli in sphæra signati. Dico, ꝙ utraq; linearũ a b & b g polarium potentialiter subdupla est diametro sphæræ, & æqualis lateri quadrati, magno circulo ipsius sphæræ inscriptibilis. Erit enim per 4. huius unusquisq; quatuor angulorum apud 3 rectus, quatuor itaq; trianguli, quibus uertex communis est punctus 3, bina latera habentes æqualia, semidiametros scilicet sphæræ, per 4. primi bases habebunt æquales. unusquisq; autem angulorum totalium, qui apud puncta a b g d sunt. rectus declaratur ex 30. tertij. per diffinitionem igitur a b g d quadratum est, inscriptum quidem circulo maiori a b g d: sicq; secunda pars theorematis ostensa est, unde & per penultimã primi confirmabimus primam partẽ

mam partem. Corollariũ autẽ nemo dubitabit postẽ ex tertij quatuor cordas æquales, cõstas scilicet quadrati prædicti, quatuor arcus æquales abscindere declarabimus.

XII.

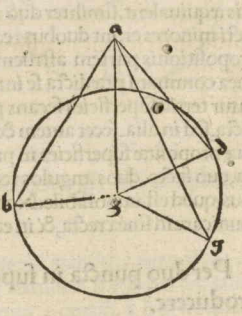
Si ab aliquo puncto superficiei sphæræ duo quadrantes duarum circumferentiarum magnarum egredientes, ad eundem arcum circuli magni terminentur, punctus ille erit polus circuli, ad cuius arcum dicti quadrantes terminantur.



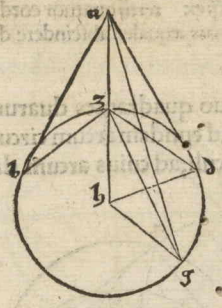
Sit punctus a in superficie sphæræ signatus, à quo egrediantur duo quadrantes circumferentiarum magnarum angulariter coniuncti, qui sint a b & a c, & terminentur ad arcum circuli magni b c. Dico, q̃ a sit polus circuli magni, cuius erat arcus ille b c. Producam enim per centrum sphæræ 3 diametrum a 3 g, complendo duas semicircumferentias magnas a b g & a c g, item binas cordas duorum quadrantum dictorum & duorum quadrantum residuorum, qui sunt g b & g c. duas postremo semidiametros circuli b c, quæ sint 3 b & 3 c. Quoniam igitur duo trianguli a 3 c & c 3 g bina latera habent æqualia, duasq̃ bases suas a c & c g per præcedentem æquales, erunt per 8. primi duo eorum anguli apud 3 æquales: quare duæ lineæ a 3 & 3 c ꝓpendiculariter sibi inuicem insistunt. Non aliter declarabitur linea a 3 perpendiculariter insistere lineæ 3 b. per 4. igitur undecimi linea a 3 ꝓpendiculariter incidit superficiei complectenti duas lineas 3 b & 3 c, quæ quidem superficies est ipse circulus magnus, quem supra notauimus, & ideo per 5. huius punctus a erit polus circuli b c, quod erat demonstrandum.

XIII.

Si à puncto superficiei sphæricæ ad circumferentiam circuli cuiuscunq; in sphæra signati, plures q̃ duæ æquales rectæ lineæ descenderint, punctus ille dicti circuli polus habebitur.



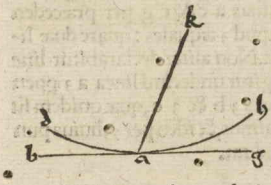
Sit punctus a in superficie sphærica notatus, à quo ad circumferentiã circuli b g d plures q̃ duæ æquales rectæ lineæ descendãt, quæ sint uerbi gratia tres a b, a g & a d. Dico, q̃ a sit polus circuli b g d. Demittatur enim ab a puncto ad superficiem circuli b g d, per 11. undecimi perpendicularis a 3, cuius pedi puncto scilicet 3 tria puncta b g d copulabimus per tres lineas 3 b, 3 g & 3 d, claudendo tres angulos a 3 b, a 3 g & a 3 d, quorum angulos apud 3 punctum rectos esse oportet, conuersa diffinitione lineæ perpendicularis ad superficiem. cum itaq̃ tres lineæ æquales ad circumferentiam circuli descendentes, illos rectos subtendant angulos, per pẽultimam primi & cõmunes scientias linea a 3 communi existente, tribus dictis triangulis tres lineæ 3 b, 3 g & 3 d æquales habebuntur: qua re pa-



re per 9. tertij 3 erit centrum circuli b g d, & ideo per 5. huius punctum a esse polũ circuli b g d conficeberis, quod libuit attingere. Assumpsimus autẽ in hoc processu punctum 3 cadere intra circulum cuius rei certitudinẽ accipies hoc pacto. Non enim potest punctus 3 esse in circumferentia circuli, si em ita fuerit sententia quidem aduersarij, â centro circuli, quod sit h, in nulla linearũ 3 b, 3 g & 3 d existente, ducantur tres semidiametri h 3, h g & h d, erit itaq; per octauam primi angulus 3 h d æqualis angulo 3 h g, pars toti, quod est impossibile. Simile incõsueniens concludemus aduersario putanti punctum 3 extra circulum cadere. huiusmodi autem impossibilibus interemptis, reliquũ est, ut punctus 3 in superficie circuli b g d reperiatur.

XIIII.

Omnes duæ superficies planæ in puncto uno communicantes, in linea quoq; recta per punctum ipsum incedente, si indefinitæ extendantur cõmunicabunt. hæc autem linea communis earũ sectio habebitur.



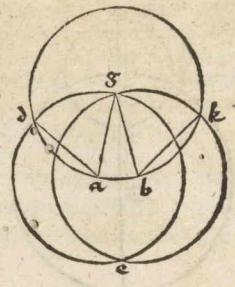
Sit punctus a communis duabus planis superficiebus. Dico, q̃ ipsæ superficies, si indefinitæ extendantur, in linea per a punctum transeunte, cõmunicabunt, & in ea linea se intersecabunt. Intelligat enim tertia superficies plana duas prædictas in puncto a communi secans, fiatq; sectio cõmunis superficiei tertiæ cum altera propositarum, linea recta b a g per 3. undecimi, quæ si fuerit, etiam in reliqua constabit prima pars theorematis. Si uero non sit communis sectio huius tertiæ superficiei, & reliquæ cuiuscunq; propositarum linea d a h, educaturq; à puncto a in superficie tertia linea a k, argumento igitur 13. primi duo anguli d a k & k a h duobus rectis æquiualent, similiter duo anguli b a k & k a g duos ualẽt rectos, quare duo recti minores erunt duobus rectis, quod est impossibile. quo interempto, primam propositionis partem astruemus. Similiter probabimus, q̃ duæ superficies illæ in linea communi prædicta se intersecabunt. Si enim non intersecent se in ea, intelligatur tertia superficies secans prædictas duas, non quidem in linea communi iam dicta, sed in alia. secet autem & hæc tertia superficies lineam in qua communicãt duæ propositæ superficies in puncto a, â quo educatur linea a k in superficie tertia, quo facto, duos angulos rectos duobus angulis rectis minores esse concludemus, quod est impossibile. Non possunt igitur duæ propositæ superficies nõ communicare in linea recta, & in ea se intersecare, quod erat lucubrandum.

XV.

Per duo puncta in superficie sphæræ signata, circulum magnum producere.

In superficie sphæræ notentur duo puncta a & b, per quæ si producendum uelis circulum magnum super puncto a tanq; polo, secundum quantitatem costæ quadrati

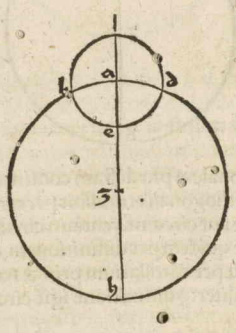
quadrati magno circulo sphæræ iscriptibilis, quæ sit a d, describe circulum e d g. secundum eandē quoq; quantitatem, scilicet secundum lineā d b k, æqualem ipsi a d super polo k circulum e g k describas, hos duos circulos se inuicem secare ex præmissa liquet, q centrum sphæræ cōmune habeant. secent igitur se circumferentiæ eorum in punctis e & g, quorum alterum uidelicet g duobus punctis a & b copulabo per lineas a g & b g, quas necesse est esse æquales, & utranq; earum æqualem esse lineæ a d aut b k costæ scilicet quadrati magni. duæ enim polares lineæ a d & a g æquales sunt, ponebatur autem b k æqualis ipsi a d, quare & a g æquabitur lineæ b k, cui etiam b k æqualis existit: sunt enim b g & b k lineæ polares, ab eodem polo unius circuli descendentes. circulus igit descriptus super g puncto tanq; polo, trāsibit per utrūq; punctorum a & b, magnus autem erit per 8. huius, q linea polaris sua g a æqualis sit costæ quadrati magni. Quo igitur pacto ꝓpositum efficere oporteat, satis ostendimus.



XVI.

Circulus magnus per unum polum alterius circuli incedens, per reliquum quoq; transibit polum.

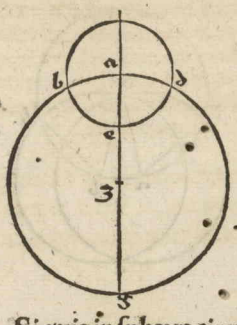
Circulus magnus a b g d per polum a circuli b e d transeat. Dico, q transibit etiam per reliquū eius polum. Continuemus enim polum a cum centro 3 circuli magni prædicti, quod & sphæræ ipsi commune est per lineam a 3, quæ producta amplius, donec superficiei occurret sphæricæ per 4 aut 7. huius, reliquum polum circuli b e d offendet, qui sit h. Si itaq; linea 3 h pars scilicet lineæ a h fuerit in superficie circuli magni a b g d, uerū enunciabat ꝓpositio: si uero non, lineæ rectæ a h pars erit in plano, & pars in sublimi, quod est impossibile per primam undecimi. Circulus igitur a b g d, per polum a circuli b e g transiēs, reliquum eius polum præterire non poterit, quod libuit declarare.



XVII.

Circulus magnus in sphæra per polum alterius circuli transiens, eum per æqualia & orthogonaliter secabit.

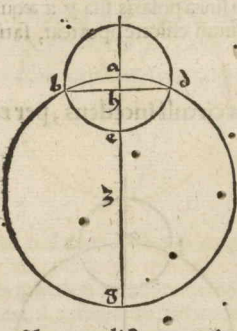
Sit circulus magnus a b g d, cuius centrum 3 transiens per polum a circuli b e d. Dico, q circulus a b g d secabit circulum b e d per æqualia & orthogonaliter. Ducatur enim â polo a ad centrum 3 circuli a b g d: quod & ipsi sphæræ est commune: linea a 3, quæ cum sit in superficie circuli a b g d, & tran-



& transeat per centrum circuli b e d, ex diffinitione quidē circuli magni, si b e d circulus magnus fuerit, aut per septimam huius, si minor, necesse quoque erit, ut circulus a b g d per centrum circuli b e d transeat. quare secabit eum per æqualia. Præterea quoniam linea a 3 ex polo a ad centrū circuli b e d descendit (siue illic quiescat, siue ultra porrigatur, nihil refert) erit ipsa per quartam huius perpēdicularis ad superficiem circuli b e d. quare per 18. undecimi superficies circuli a b g d per ipsam lineam a 3 incedens, orthogonalis erit ad superficiem circuli b e d, quæ fuere lucubrāda.

XVIII.

Si quis in sphæra circulus alium per æqualia & orthogonaliter secuerit, ipse magnus erit, & per polos eius quem secat transibit.



Hæc conuertit præmissam. Circulus a b g d secet circulum b e d p æqualia & orthogonaliter. Dico, q circulus a b g d magnus est. Sit enim cōmunis eorum sectio linea b d, quam oportet esse diametrum circuli b e d, quemadmodum ex hypothesi trahitur, cuius punctus h sit centrum circuli b e d, à puncto autem h in superficie circuli a b g d egrediatur orthogonalis ad diametrū b d, quæ etiam orthogonalis erit ad superficiem circuli b e d, ex diffinitione superficiei orthogonaliter supra superficiem erectæ & quarta undecimi. quare per quintam huius orthogonalis illa transibit per polos circuli b e d, unde & circulus a b g d orthogonalem prædictam continens per polos huiusmodi incedet. Item p 3 huius ipsa orthogonalis transibit per centrum sphæræ. si igitur utrinq; ad superficiem sphæræ aut circumferentiam circuli a b g d porrecta fuerit, ipsa erit diameter: sphæræ quidem per diffinitionem, circuli autem a b g d, q per centrum eius transeat aut per corollarium primæ tertij. secat enim cordam b d per æqualia & orthogonaliter: p diffinitionē igit circulus a b g d magnus est, quæ oportuit explanare.

XIX.

Omnes circuli magni in sphæra per æqualia se inuicem secant.

Commune enim omnibus circulis magnis in sphæra diffinitur centrum sphæræ, quicunq; igitur duo circuli in hoc uno puncto participāt, & in linea recta punctum ipsum recipiente, tanq; sectione communi participabunt 12. huius confirmante. hæc autem sectio communis utriusq; circulorum erit diameter, utrunq; eorū p æqua scindēs, quare & ipsi p æqua se scindent, qd nostra enūciabat cōclusio.

XX.

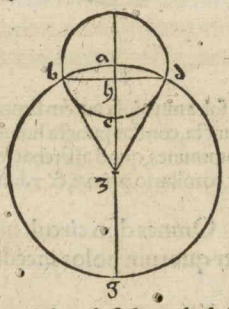
Omnis circulus magnus per polos circuli in sphæra magni ad quē ipse erectus est transibit.

Linea

Linea nanq; â centro eorum communi (omnes enim circuli magni in centro sphæræ participant) ad sectionem communem in altero eorum orthogonaliter egrediens ad reliquum, erit orthogonalis per diffinitionem supeficiei supra superficiem erectæ & quartam undecimi. quare per quintam huius ad polos eius perueniet. cunq; ipsa superficiem circuli erecti non egrediatur, necessario ipse circulus erectus circuli substrati polos complectetur, & hoc decuit confirmare.

XXI.

Quicunq; circulus magnus alium in sphæra minorem circulum orthogonaliter secat, ipsum quoq; per æqua partietur. & si per æqualia scindet, orthogonaliter eum secabit. Vnde polos circuli minoris præterire non poterit circulus ipse magnus.

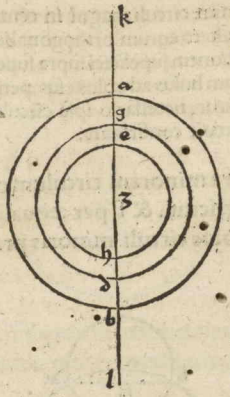


Secet enim circulus magnus a b g d, cuius centrum 3 circulum minorem b e d orthogonaliter secundum lineam b d. Dico, q; secabit eũ p æqualia, quem si per æqua secuerit, orthogonaliter quoq; secuisse prædicabo. Diuisa enim sectione cõmuni b d per æqualia in puncto h, ducatur â centro sphæræ circuli magni a b g d, quod est 3, ad punctum h linea 3 h, quæ ex diffinitione sphæræ & octaua primi ductis duabus semidiametris 3 b & 3 d, ꝓpendicularis erit ad sectionem communem b d. quare per diffinitionem superficiei erectæ ad superficiem & quartam undecimi linea 3 h orthogonalis erit ad superficiem circuli b e d, & ideo per corollarium primæ huius punctus h erit centrum circuli b e d, & linea b d diameter eius, quæ cum secet circulum b e d per æqualia, eundem quoq; circulus a b g d secabit per æqualia, quod asseruit prima pars theorematis. Secet deniq; eũ per æqualia, linea d b diametro circuli minoris existente, in qua punctus h centrum eius accipiatur, quod cum centro 3 circuli magni & sphæræ ipsius cõpulabimus per lineam 3 h, quam ex secunda huius ꝓpendicularem esse oportet ad superficiem circuli b e d. quare & per 18. undecimi superficies circuli a b g d ad ipsam orthogonalis erit. Circulus igitur a b g d circulũ b e d orthogonaliter secabit, quod erat exponendũ. Necesse autẽ est, ex utraq; hypothesi & eis quæ in processu præsenti recitauimus, lineam 3 h utrinq; superficiei sphæricæ occurrentem circuli b e d polos inuenire, cũq; ipsa superficiem circuli a b g d egredi non possit, ipse circulus a b g d maior polos circuli minoris non præteribit, quod pollicebatur corollarium.

XXII.

Omnes circuli in sphæra, quibus eidem sui poli sibi inuicem æque distant: & si fuerint æquedistantes quotlibet circuli, duos polos habebunt communes. Vnde patet, quotlibet circulorũ in sphæra æquedistantiũ centra cum polis suis in una reperiri linea recta.

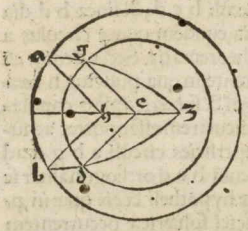
Sint tres aut plures circuli quotlibet a b g d, & e h in sphæra una, quibus duo poli k & l cõmunes existant. Dico q; ipsi inter se æquedistabunt, qui si ponantur



æquedistantes in polis duobus cõmunicabunt. Continuabo eñ duos polos k & l per lineam k l, quæ p 7. huius transibit p centrum sphæræ, centraq; omnium circulorum æquedistantium. quare per quartã huius uniuersis circulis orthogonaliter incidet, & ideo per undecimi circuli dicti inter se æquedistabunt, quod enunciabat prima pars theorematis nostri. Sed ponamus eos æquedistantes, pducamusq; à centro sphæræ ad centrum uniꝰ eorum lineam rectam, quæ per 2. huius ppendicularis erit ad superficiem circuli, ad cuius centrum ipsa pducitur. Hæc autem linea utrinq; ad superficiem sphæræ extensa, reliquis omnibus circulis æquedistantibus ppendiculariter incidet ex hypothesi & undecimi. quare per corollarium primæ huius per centra singulorũ transibit, & ideo ex 5. huius per polos omnium incedet. cunq; polos in superficie sphæræ dũtaxat signare soleamus, ipsa autem sæpedicta linea in superficie sphæræ duo tantum offendit puncta, constat puncta huiusmodi esse polos omnibus circulis æquedistantibus communes, quod asserebat secunda pars ppositionis. Corollarium autem huius ex corollario primæ, & 7. huius confirmabitur.

XXIII.

Omnes duo circuli magni ex circulis in sphæra æquedistantibus, per quorum polos incedunt, arcus absumunt similes.

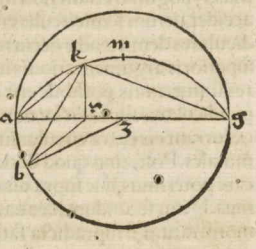


Sint duo circuli æquedistantes a b & g d in sphæra una, cõmunem ex præcedenti habentes polum 3, per quem & sibi oppositum polum incedãt duo circuli magni, quorum arcus cuntaxat in figura hac posuisse satis est, qui sint 3 a & 3 g, secantes circumferentias circulorum æquedistantium, circuli quidem a b in punctis a & b, circuli uero d g in punctis g & d. Dico, q; duo arcus a b & g d sint similes. Egrediatur enim à polo 3 ad polum sibi oppositum linea recta, quam constat esse cõmunem sectionem duorum circulorũ magnorũ in qua necesse est reperiri duo centra circulorum a b & g d ex corollario præcedentis. sit igitur h centrum circuli a b, & e centrum circuli g d, à quibus binæ educantur semidiametri ad quatuor puncta sectionum, quæ sint h a, & h b quidem circuli a b, e g autẽ & e d, circuli g d. oportet autẽ has semidiametros esse in cõmunibus sectionibus duorum circulorũ magnorum & ipsorum æquedistantium, q; puncta eas terminantia in utriusq; circulis existant. Quoniã itaq; circulus a g 3 secat duos circulos æquedistantes a b & g d, erunt per undecimi duæ lineæ a h & g e sectionis cõmunis æquedistantes, similiter duæ lineæ b h & d e æquedistabunt. duæ igitur lineæ a h & b h angulariter coniunctæ æquedistant duabus g e & d e angulariter coniunctis, & ideo per undecimi angulus a h b, æqualis erit angulo g e d, utriusq; ergo eorum ad quatuor rectos una est proportio, quæ quidem, ut ex ultima sexti trahitur, est tanq; utriusq; duorum arcuũ a b & g d

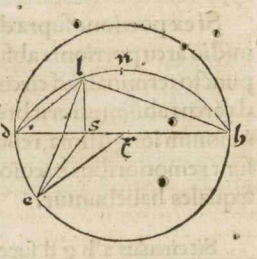
& g d ad ſuam circumferentiam. proportio itaq; arcus a b ad ſuã circumferentiam eſt ut arcus g d ad ſuam. per diffinitionem igitur duo arcus a b & g d duobus circulis magnis intercepti ſunt ſimiles, quod oportuit explanare. Non aliter procedemus, ſi plures q̃ duo æquediſtantes circuli nobis offerantur, niſi q̃ media, quibus freti ſumus, quoties res ipſa popoſcerit ingeminemus.

XXIIII.

Si ſuper duas diametros duorum circulorum æqualium erigantur duæ portiones unius circuli æquales, aut duorum circulorum æqualium, ex ipſis autem portionibus accipiãtur duo arcus æquales, quorum uterq; minor ſit dimidio arcu portionis ſuæ, itemq; ex circũferentijs circulorum arcus æquales conterminales quidẽ arcubus portionum acceptis, lineæ rectæ continuantes extrema arcuum acceptorũ æquales erunt. & ſi lineæ ipſæ ſint æquales, arcus autem portionum æquales, minores tamen dimidijs arcubus ſuarum portionum, arcus quoq; circulorum æquales erunt.



Sint duo circuli a b g & d e h æquales, à quorum diametris a g & d h exurgant duæ portiones æquales a k g & d l h unius circuli, aut duorũ circulorum æqualium, orthogonales ad circulos ſubiacentes, quarum portionum uertices ſint puncta m & n, diuidentia arcus portionũ per æqualia, accipiaturq; ex una earũ arcus a k minor arcu a m, ex reliqua uero d l minor arcu d n. ſed & duo arcus a b & d e circulorum ſubſtratorũ æquales ſtatuant. pductas itaq; lineas rectas b k & e l æquales, concludam hac argumentatione. A duobus pũctis k & l duas ꝓpendiculares k r & l s, demitto ad ſectiones cõmunes circulorum & portionum, punctaq; b & e pedibus ꝓpendicularium demiſſarum & centris circulorum copulabo, b quidem per lineas b r & b 3, e autem per lineas e s & e x, duasq; cordas k g & l h in portionibus ipſis ponã. Quia itaq; duo arcus a k & d l æquales ſunt, erũt duo anguli k g r & l h s æquales, uterq; autem angulorum apud puncta r & s rectus eſt, latus autem k g trianguli k g r æquatur lateri l h trianguli l h s, ꝓpter duos arcus k g & l h æquales. quare per



26. primi duo latera reſidua trianguli k g r duobus lateribus reliquis trianguli l h s æqualia erunt, r g quidem ipſi s h & k r lateri l s. demptis ergo circulorum æqualibus ſemidiametris, relinquetur r 3 æqualis ipſi s x, eſt autem b 3 æqualis ipſi e x. ſunt enim ex hypotheſi duo circuli æquales, quorum ipſæ ſemidiametri habentur, angulus autem b 3 r æquatur angulo e x d ꝓpter arcus a b & d e, quos hypotheſis æquales ſubiecit, ultima ſexti cooperante: quare per quartam primi baſis b r trianguli b 3 r æquabitur baſi e s trianguli e x s. Cum autem utraq; linearum k r & l s demiſſa ſit perpendiculariter ad ſectionem cõmu-

nem ſuperficierum, ex diffinitione ſuperficiei ad ſuperficiem erectæ & quarta undecimi, erit utraq; earum perpendicularis ad ſuperficiem circuli ſibi ſubſtrati, & ideo per diffinitionem perpendicularis ad omnem lineam in ſubſtrata ſuperficie ſibi conterminalem. duo igitur anguli b r k & e s l recti ſunt, quos cum circundēt æqualia latera quemadmodū deductum eſt, erunt per 4. primi duæ lineæ b k & e l rectis angulis oppoſitæ æquales, quod enūciabat theorematis noſtri prima pars. Qđ ſi eas lineas ponendo æquales uelimus oſtendere æqualitatem arcuum a b & d e, reliquis ut antehac manentibus, hoc pacto ratiocinabimur, ppter duas lineas b k & k r æquales duabus e l & l s, angulosq; apud r & s rectos penultima primi & cōmunibus ſcientijs confirmantibus, linea b r æqualis erit lineæ e s, baſis uidelicet trianguli b r 3 baſi trianguli e s x, quorum etiam bina latera ſunt æqualia, quemadmodū in priori proceſſu explanauimus, quare per 8. primi duo eorum anguli b 3 r & e x s in ceſtris ſuorum circulorū quieſcentes æquabuntur, & ideo per tertij duos arcus a b & d e æquales eſſe oportebit, quod ꝓmittebat ſecunda pars ꝓpoſitionis. Aduertendum tamen, ꝙ ſi ex erectis portiōibus arcus æquales abſumpſerimus, non minores, ſed maiores dimidijs arcubus ſuarum portionum cæteris ut antea manentibus, eandem per omnia paſſionem demonſtrabimus, ſyllogiſmo etiam non mutato. Præterea ſi erexeris ſemicirculos æquales, idē accidet, uerum ſemicirculis erectis, aut portionibus minoribus ſemicirculo ꝓpendiculares demittendæ occurrent diametris circulorum ſubſtratorū, forma igitur ſuperioris argumentationis haud mutabitur. Si uero portiones ſemicirculo maiores ſtatuerimus, poſſibile erit ex eis abſcindere arcus æquales adeo paruos, ut perpendiculares ſupradictæ non offendant diametros ſubſtratorum circulorum, ſed occurrant eis extra circulos ſuos prolongatis, aut fortaſſe ſint diametris conterminales. Poſtremo quod dē duobus ſubſtratis circulis dixímus, ad unicum applicare poterimus, ſiue ſupra diametrum eius unam portionem, ſiue plures erexerimus. Igitur ſecundum hæc uaríabis parumper figurationem, ꝓceſſum autem demonſtratum, ſi ſupradicta ſatis tenueris, facile comparabis.

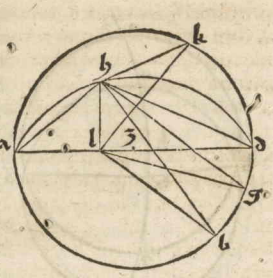
XXV.

Si ex portione ſupra diametrum circuli erecta arcum minorem dimidio arcu portionis abſumpſeris, omnium linearum rectarū ab eius puncto terminali ad circumferentiam circuli ſubſtrati demiſſarū corda arcus abſumpti erit breuiſſima, corda autem reſidui arcus portiōis omnium longiſſima, reliquæ uero, quo breuiſſimæ ſunt uiciniores, eo ſunt remotioribus breuiores, æqualiter autem à breuiſſima remotæ, æquales habebuntur.

Sit circulus a b g d ſuper centro 3, cuius diameter a 3 d ſit corda portionis a h d orthogonaliter inſiſtentis circulo dicto, ſumaturq; arcus a h minor dimidio arcu portionis, à cuius puncto h ad circumferentiam circuli a b g d demittantur lineæ rectæ, h a quidem corda arcus h a, & h d corda arcus reſidui, itemq; quotlibet aliæ lineæ rectæ, quarū duæ h b & h g inæqualiter à breuiſſima diſtantes, duæ uero h b & h k æqualiter ab ea remotæ, demonſtrationi perficiendæ ſufficient. Dico, ꝙ corda a h omnium demiſſarum linearum eſt breuiſſima, & corda d h omnium longiſſima, linea autem h b breuior linea h g, quod ſic accipias. A puncto h ad diametrum a d perpendicularis deſcendat h l, cuius pedi puncto

ſcilicet

ſcilicet l duo puncta b & g connectantur per lineas b l & g l. oportet autem punctum l diſtare à centro 3 uerſus a punctum, quoniã ex primi huius caſus a l minor eſt caſu l d, ꝓpter latus a h trianguli a h d, minus latere h d, quod comitatur hypotheſim. puncto igitur l præter centrũ circuli a b g d ſignato, erit per tertij linea l a omnium ab eo puncto ad circumferentiam circuli egredientium linearum breuiſſima, l d autem omnium longiſſima, item l b breuior linea l g. Cum autem h l in ſuperficie alterius duarum ſuperficierum orthogonaliter ſe ſecantium, ſectioni earum communi orthogonaliter inſiſtat, erit ipſa

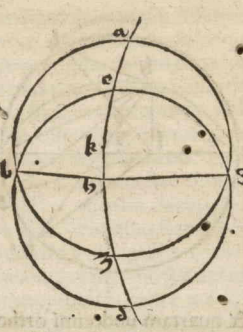


per diffinitionem ſuperficiei ad ſuperficiem erectæ, & quartam undecimi orthogonalis ad reliquam, & ideo per diffinitionem lineæ erectæ ad ſuperficiẽ, ipſa erit orthogonalis ad omnem lineam ſibi in relíqua ſuperficie conterminalem, quare omnes anguli, quos ambiunt lineæ à puncto l egredientes, cum ipſa linea h l recti habebuntur. ſi igitur quatuor triangulos in latere h l communicantes notaueris, quorum reliqua latera ſunt lineæ ab h puncto demiſſæ, & ab l puncto egredientes per penultimã primi & cõmunes animi conceptiones confiteberis lineam h a omnium demiſſarũ linearum eſſe breuiſſimã, & h d longiſſimam, h b uero breuiorẽ linea h g, & lineã h k æqualem h b, quæ pollicebamur demonſtranda. Huiuſmodi paſſionem demonſtrabimus etiam de ſemicirculo erecto ſupra diametrum circuli, non aliter ꝙ de portione quam minorem poſuimus ſemicirculo, ſimile præterea accidit portioni maiori ſemicirculo, uerũ perpendicularis h l nõ ſemper reſidebit in diametro circuli ſubſtrati, nam poſſibile eſt abſcindere arcũ ex huiuſmodi portione adeo paruum, ꝙ perpendicularis dicta non occurrat diametro, niſi extra circulum prolongetur, aut fortaſſe cõcurret cum ea in termino ſuo, quod cũ euenerit, utemur & tertij in proceſſu demonſtratiuo, ubi pridem adduximus tertij, reliqua uero omnia prorſus repetemus.

XXVI.

Circulus magnus in ſphæra tranſiens per polos duorum circulorũ ſe ſecantium, diuidit arcus ſeparatos eorum per æqualia. & ſi diuiſerit arcus eorum ſeparatos per æqualia, tranſibit per polos eorum. ꝙ ſi arcus unius eorum per æqua partiatur, per polum alterius eorum tranſeundo, ipſe quoq; arcus ſeparatos reliqui diuidet per æqualia, & per polos amborum incedet.

Sint duo circuli in ſphæra a b g & e b g qualeſcunq; ſecantes ſe in punctis b & g, per quorum polos incedat circulus magnus a e 3 d, ſecans binos arcus ſeparatos circulorum a b g & e b g in punctis a, e, 3 & d. Dico, ꝙ arcus a b æqualis eſt arcui a g, & b 3 æqualis g 3. item duo arcus b e & e g inuicem, duoq; arcus b d & d g ſibi æquales erunt. Polus nanq; circuli a b g ſit k, & polus circuli e d g ſit punctus h, à quo ad duo puncta b & g protrahantur duæ rectæ h b & h g, quas oportet eſſe æquales, h polo circuli e d g exiſtente. Quoniam igitur circulus a e 3 d tranſit per polos amborum circulorum, ipſe ſecabit utrunq;



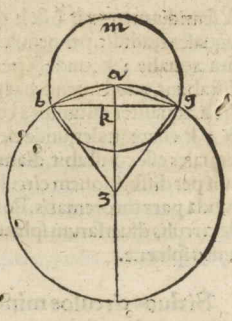
eorum per æqualia & orthogonaliter ex huius, quare portio a e 3 erigitur supra diametrum circuli a b g, ex qua abscindit arcus 3 h minor dimidio arcu portionis, â cuius termino h duæ rectæ æquales ad circumferentiam circuli a b g descendunt, fit igitur per huius arcus b 3 æqualis arcui 3 g, cunq; utercq; arcuum a b 3 & a g 3 sit semicircumferentia circuli, q̃ circulus a e d transiens per polum circuli a b g, secet eum per æqualia, demptis utrobiq; æqualibus arcubus, manebit arcus a b æqualis arcui a g. Non aliter ostendemus arcũ e b æqualem esse arcui e g, si portionem e h d supra diametrũ circuli e b g erectam esse intellexerimus, erit em̃ arcus e k minor dimidio arcu portionis suæ, lineæq; â puncto k ad duo puncta b & g demissæ, æquales probabuntur, k polo circuli a b g existente. Hinc etiam reliqui duo arcus b d & d g æquales ostendentur, primæ igitur parti theorematis assentire compellimur, sed pone circulum a e 3 d diuidere arcus separatos eorum per æqualia in punctis a e 3 & d. Dico, q̃ transibit per polos eorum. Si enim non, transeat alius circulus magnus per polos eorum, quod quidem possibile est per & huius, qui per iam demonstrata transibit etiam per quatuor puncta a, e, 3 & d. secabunt ergo se duo circuli magni in sphæra in istis quatuor punctis, quare per huius unusquisq; arcuum a e, a 3, e 3 & e d erit semicircumferentia, omnes autem semicircumferentiæ unius circuli æquales phibentur, pars igitur æqualis erit toti, quod est impossibile. Non potest ergo circulus alius transire per polos huiusmodi, nisi ille qui dicta quatuor puncta transcurrit. Cum itaq; per omnia duo puncta in superficie sphæræ signata transire possit circulus magnus, ut ex huius didicimus, & nõ potest transire per duos polos k & h alius circulus præter eum, qui per quatuor puncta a, e, 3, d incedit, manifestum est, q̃ circulus magnus per quatuor dicta puncta transiens, duos polos præterire non poterit, qui tandem ex huius per reliquos duos polos incedere cogitur, & illud, pponebat pars secunda. Postremo si circulus a e 3 d secuerit, uerbi gratia, arcum b a g per mediũ in puncto a, & trãsierit per polos alterius se secantium circulorum. Dico, q̃ secabit & reliquũ p æqualia per polos amborum transeundo. Si enim non, secet eos alius quispiam p æqualia, aut transeat per polos eorum. ille igitur per polos amborum incedens, secabit arcus separatos eorum per æqualia, cõmunicabunt itaq; duæ circumferentiæ circulorum magnorum in tribus punctis, uidelicet duobus polis alterius eorum & puncto a, eritq; unusquisq; arcuum inter duo quælibet puncta comprehensus, semicircumferentia per huius, unde sequitur partem suo toti æqualem esse, quod est impossibile. Non igitur stabit hæc hypothesis, nisi circulus ille transeat per polos amborũ, & secet utriusq; arcus separatos per æqualia, quæ fuere demõstranda.

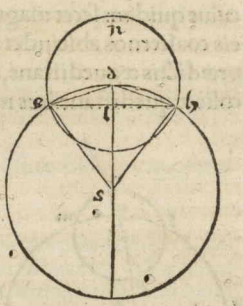
XXVII.

Omnes circuli secundum æquales lineas polares descripti in sphæra una, aut diuersis æqualibus tamen, æquales existunt. & si circuli æquales fuerint, lineas eorum polares æquari necesse est.

Si lineæ polares lateri quadrati magni æquales habeantur, constabit per 8. huius

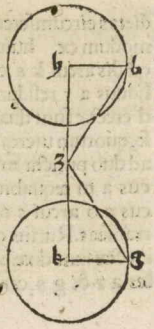
huius & diffinitionem: omnes circulos & magnos & æquales inuicem esse. Sed ponamus eas minores, aut maiores huiusmodi latere quadrati magni, sint q̄ a g & d h secundum quas duo circuli b m g & e n h in sphæra una, aut diuersis æqualibus tamen describantur, quos dico esse æquales. Transeant em̄ per polos eorum qui sint a & d duo circuli magni a b g, cuius centrum 3, & d e h super centro s, q̄ per 15. huius secabūt descriptos circulos per æqualia & orthogonaliter, sintq̄ communes sectiones lineæ b g & e h, descendant demum à polis a & d aliæ duæ polares lineæ a b & d e p̄dictis duabus æquales, à centris autem circulorum binæ egrediātur semidiametri 3 b & g 3 circuli a b g, s e autem & s h circuli d e h, erit igitur ex hypothesi & tertij arcus a g æqualis arcui d h, itemq̄ arcus a b æqualis arcui d e, quare per communem scientiam totus arcus b g toti arcui e h æqualis habebitur, & ideo per tertij corda b g, quæ est etiam diameter circuli b g m æqualis erit cordæ e h, quæ est diameter circuli e h, quare per diffinitionē circulorum æqualium patebit prima pars theorematis. Conuertendo autem processum iam recitatum, facile concludemus æqualitatem linearum polariū, si prius circulos ipsos subiecerimus æquales, erunt enim duæ eorum diametri b g & e h æquales per conuersionem diffinitionis circulorū æqualium, unde & per tertij arcus b g & e h, quorum ipsæ sunt cordæ, æquales inuenientur. quare per cōmunem scientiam arcus eorū dimidij a g scilicet & d h nō erūt inæquales, & ideo per tertij cordæ suæ a g & d, quæ & polares lineæ sunt, æquales demonstrabuntur. utrancp igitur theorematis partem firmauimus, quod quidem studiosus expectabat discipulus.





XXVIII.

Omnes minores circuli æquales à centro sphæræ eos continentis æqualiter distant, & si ab eo centro æqualiter distiterint circuli minores quotlibet, ipsos æquales esse conuincemus.



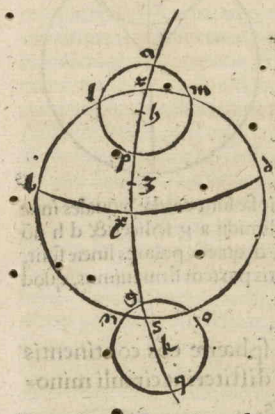
Sint duo circuli minores a b & g d. aut plures quotlibet in sphæra æquales. Dico, q̄ ipsi æqualiter distent à centro sphæræ, qui si fuerint æquedistantes à centro sphæræ, æquales necessario habebuntur. Primam partem sic confirmabimus. A centro sphæræ quod sit 3 ad centra duorū circulorum h & k educantur duæ lineæ 3 h & 3 k, duæq̄ semidiametri sphæræ 3 b & 3 g, quarum duos terminos connectemus per lineas h b & k g, eritq̄ per huius utraq̄ linearum 3 h & 3 k perpendicularis ad superficiem circuli cui incidit, & ideo per diffinitionē perpendicularis ad semidiametrum sibi conterminalem, quare uterq̄ angulorum 3 h b & 3 k g rectus habetur. oportet autē

& semi

& semidiametros h b & k g esse æquales, ꝓpter circulos eorum, quos hypothesis æquales tradidit. per penultimam igitur primi & communes scientias erit 3 h linea æqualis 3 k, unde & per diffinitionem circuli dicti æqualiter â cẽtro sphæræ distabunt, quod intendebat prima pars ꝓpositionis. Sed ponãtur duo circuli prædicti æqualiter distantes â centro sphæræ, quamobrem oportebit duas lineas 3 h & 3 k esse æquales, unde ex medijs præassumptis duas semidiametros h b & k g æquales esse constabit. diametris ergo circulorum æqualibus existentibus, ipsi circuli per diffinitionem circuloꝝ æqualium æquales habebuntur, quod asseruit secunda pars theorematis. Poterimus autem & has mutuas passiones demonstrare de circulis diuersarum sphærarum æqualium tamen, non aliter quâm de circulis unius sphæræ.

XIX.

Si duos circulos minores in sphæra æquales & æquedistantes, circulus quidam secet magnus per polos eorum non transiens, arcus ex eis coalternos abscindet æquales. circulus præterea magnus duobus prædictis æquedistans, arcus circuli inclinati interceptos duobus circulis æquedistantibus minoribus per æqualia secabit.



Ex duobus circulis minoribus a l p & g n q in sphæra unã æqualibus & æquedistantibus, circulus magnus l b o d per polos eorum non incedens, secet arcus coalternos l a m & n g o, quibus quidẽ circulis æquedistet circulus magnus b x d, secans duos arcus l n & m o circuli l b o d in duobus punctis b & d. Dico, ꝙ arcus l a m æqualis est arcui n g o, & arcus l p m arcui n q o æqualis, & ꝙ circulus magnus b x d æquedistans duobus minoribus, duos arcus l n & m o per æqua scindet in punctis b & d. Duos enim polos per huius communes esse oportet, tribus dictis circulis æquedistantibus, qui sint h & k, polus autem circuli l b o d sit punctus 3. per duos itaq; polos h & 3 incedat circulus a h 3 k huius edocebit, qui transibit etiã per punctum k ex huius. Cum itaq; arcus r s sit semicircumferentia per huius, arcusq; h k sit medietas circumferentiæ, ꝙ duo poli h & k diametrum sphæræ terminent, quemadmodum ex huius trahitur, ablato arcu communi h s, relinquetur arcus h r æqualis arcui k s. ex autem huius duo arcus k g & h a æquales sunt, quare & residuus a r residuo g s æqualis habebitur. Supra diametrum autem circuli l b o d erectæ sunt duæ portiones æquales, ex quibus sumuntur arcus æquales r h & s k, quorum uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ, lineæq; â punctis h & k ad duo puncta m & o protensæ, æquales sunt per huius, quare per huius arcus a m æquabitur arcui s o, arcus autem r m æqualis est arcui l r, similiter arcus s o arcui s n, cum circulus a h 3 k per polos horum circulorum se secantiũ transeat. Rursus quoniam supra diametros duorum circulorum a l p & g n q, erectæ sunt duæ portiones æquales a p & g q, ex quibus absumpti sunt arcus æquales a r & g s, quorum uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ, lineæ uero â punctis

punctis r & s ad puncta circulorum subſtratorum m ſcilicet & o protenſæ ſunt æquales, propter arcus r m & s o, quos æquales nuperrime concluſimus, erit per huius arcus a m æqualis arcui g o, arcus autem a m æquatur arcui a l, & arcus g o arcui g n propter circulum magnum a h 3 h, per polos circulorum ſe ſecantium tranſeuntem. quare totus arcus l a m æquabitur toti arcui n g o, reliquus q; l p m reliquo n q o non erit inæqualis. conſtat ergo prima pars propoſitionis noſtræ. Poſtremo unuſquiſq; quatuor arcuum r b, b s, s d & d r eſt quadrans circumferentiæ, quandoquidem circulus a h 3 k per polos duorum circulorum b l o d & b x d magnorum tranſit, à quibus ſingulatim quadrantibus, ſi dempſeris quatuor arcus æquales l r, r m, n s & s o, relinquentur quatuor arcus l b, b n, o d & d m inter ſe æquales. utrunq; igitur arcuum l n & m o circulus magnus b x d duobus minoribus æquediſtans, per æqualia ſcindit, quod ſecundo loco demonſtrandum extitit.

XXX.

Omnis anguli ſphæralis ad quatuor rectos eam eſſe proportionẽ, quam baſis eius ad circumferentiam ſuam.

Si ultimam ſexti Euclidis ſatis uidiſti, non laebit te noſtri theorematis demõſtratio, per habitudines enim æquemultiplicium uſitato iuuabis te ſyllogiſmo.

XXXI.

Cuncti ſphærales anguli, ſiue in ſphæra una, ſiue diuerſis, quorum baſes ſunt ſimiles, ſibi inuicem æquabuntur.

Erit enim baſibus ſimilibus ad ſuas circumferẽtias una proportio per cõuerſionem diffinitionis arcuum ſimilium, angulorũ autem ad quatuor rectos præcedens, eam cõcluſit 2portionem, quam baſium ad ſuas circumferentias, erit igitur omnium angulorum ad quatuor rectos una proportio, per 7. ergo quinti anguli ipſi æquales erunt, quod oportuit declarare.

XXXII.

Omnium angulorum æqualium baſes inueniri ſimiles.

Aequaliũ nanq; angulorum ad quatuor rectos eandem conſtat eſſe proportionem, quæ quidem per huius eſt, ut baſium ad ſuas circumferentias. baſiũ igitur huiuſmodi angulorum ad ſuas circumferentias eadem habetur proportio, quare per diffinitionem ſimiliũ arcuum baſes ipſæ ſimiles conuincent, quod eſt 2poſitũ.

XXXIII.

Quorum diſſimiles ſunt baſes, angulos inæquales eſſe, angulorum quoq; inæqualium diſſimiles reperiri baſes.

Hæc ex contrario ſubiecti præmiſſæ & ante præmiſſæ contrarium infert paſſionum ſuarum aduerſarium ducendo ad impoſſibile. Si enim baſes diſſimiles admiſerit, angulos autem æquales, erunt ex præmiſſa baſes ſimiles, igitur ſimiles & diſſimiles eſſe confitebitur eaſdem baſes, quod eſt inconueniens. Quod ſi angulis inæqualibus exiſtentibus baſes putauerit ſimiles, ſequitur ex antepræmiſſa & angulos eſſe æquales. quare eoſdem angulos æquales inuicem & inæquales affirmabit, quod, quoniam repugnantiam parturit, eſſe non poteſt. Deſtructis autem impoſſibilibus, ueritatẽ 2poſitionis inferemus.

XXXIIII.

Iuxta punctum quotlibet in superficie sphæræ signatum, angulo proposito æquum angulum statuere.

Sit angulus propositus b a g, cui iuxta pūctum d in sphæra quacunq; æqualem constituere libet. Angulo b a g substerno basim suam b g, deinde super puncto d secundum distantiam quantamlibet describo circulum, ex cuius circumferentia abscindo arcum e 3 simílem arcui b g, quod per 23 primi & ultimam sexti facile comparabis, duoq; puncta eius terminalia e & 3 puncto d per duos arcus circulorum magnorum copulabo, qui sint d e & d 3, quos dico apud punctum d continere angulum æqualem angulo b a g, cuius ratio propter similitudinem duarum basium b g & e 3 ex huius manifesta apparet. Facilius tamen id effici es in sphæra una, aut diuersis æqualibus tamen. Super puncto em d secundum distantiam a b circumduces circulum, ex cuius circumferentia arcum e 3 abscindes æqualem arcui b g, reliqua ut antehac disponendo. Erunt enim duo circuli, ex quarum circumferentijs bases abscinduntur, per huius æquales. cunq; bases ipsæ sint æquales, erunt etiam similes, per igitur huius syllogismum conficies.

XXXV.

Omnium duorum triangulorum sphæralium, quorum cuncta latera unius cunctis lateribus alterius æqualia sunt, oēs angulos æquis oppositos lateirbus æquales esse.

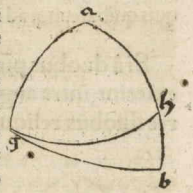
Omnes trianguli, de quibus futurum habebimus sermonem, in superficie unius sphæræ, aut duarum uel pluriū æqualium tamen, ex arcubus circulorum magnorum constantes intelligemus. Sint itaq; duo triangulí a b g, & d e 3, quorum trina latera sunt æqualia, latus quidem b g unius lateri e 3 alterius, & reliqua reliquis. Dico, q; anguli æqualibus oppositi lateribus sunt æquales, angulus uidelicet a angulo d, & reliqui suis relatiuis. Si enim utriq; arcuum anguloa a & d ambientium fuerint quadrantes, erunt duo puncta a & d poli circulorum b g & e 3 per huius, quare per huius duo anguli a & d æquales erunt, q; bases eorum sint similes, imò æquales. Si uero bini arcus dictos angulos continētes fuerint æquales, minores tamē quadrāte diuisim, descriptis duobus circulis super polis a & d secundum distantias æquales a g & e 3, circuli ipsi æquales erunt per huius, arcus autem eorum ad bina puncta b g & e 3 terminati (necesse enim est eos ad pūcta dicta terminari propter æqualitatem binorum arcuum à punctis a & d descendentium) arcus inq; illi æquales erunt, quoniam habebunt cordas æquales, ppter arcus b g & e 3 eis conterminales, quos quidem hypothesis subiecit æquales, quare per 21. huius anguli a & d æquales habebuntur. Qd si bini arcus, qui ambiunt duos angulos a & d, inæquales fuerint, sint minores eorum duo arcus a g & d 3, superq; punctis a & d tactis polis secundum

distantias

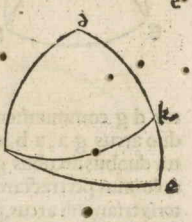
distantias æquales a g & d 3 describantur circuli g h & 3 k, quos constat esse æquales per huius, supra quorum diametros erectæ sunt duæ portiones æquales, ex quibus quidē portionibus accepti sunt duo arcus h b & k e æquales, quorum uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ. b g autem recta linea, si producta fuerit, æqualis est ipsi e 3, propter arcus b g & e 3 æquales, erit igitur per huius arcus g h æqualis arcui 3 k. illi autem duo arcus, cum sint bases duorum angulorum a & d, per huius angulos suos afferent æquales. Quemadmodum autem circa angulos a & d processimus, circa reliquos quoq; faciemus, & hæc instituimus declaranda.

XXXVI.

Omniū duorū triangulorum, quorum duo latera unius duobus lateribus alterius sunt æqualia, angulusq; unius dictis lateribus cōtētus angulo alterius, basis quoq; unius basim alterius æquabit, reliqui demum anguli unius reliquis angulis alterius, quisq; uidelicet suo relatiuo æquabuntur.

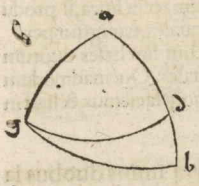


Trianguli a b g latus a b lateri d e trianguli d e 3 æquale habeatur, latus uero a g æquale lateri d 3, & angulus a æqualis angulo d. Dico, q latus b g lateri e 3 æquabit. angulus etiam b angulo e, & angulus g angulo 3 æquabūtur. Si enim utrunq; laterum a b & a g, fuerit quadrans circumferentiæ, similiter utrunq; laterum d e & d 3, erūt duo puncta a & d poli circulorum b g & e 3, per huius, cūq; positi sint anguli a & d æquales, erunt per huius bases eorum similes, arcus scilicet b g & e 3, & ideo æquales, q circuli eorum æquales habeantur. Si uero bini arcus, qui duos angulos a & d ambiunt, inter se fuerint æquales, non tamen quartæ circulorum, necesse est circulos descriptos super polis a & d secundum distantias a g & d 3 transire per puncta b & e, erunt q; ex hypothesi & huius arcus horum circulorum, quos latera triangulorū intercipiunt similes, & ideo æquales, q circuli eorum huius confirmante æquales habeantur. unde etiam eorū cordas æquari oportet, quæ quidem cordæ arcubus b g & e 3 lateribus scilicet triangulorum ppositorum cōmunes sunt, quare & arcus ipsi æquales erunt. Postremo duorum arcuum a b & a g alter altero maior sit arcus, uerbi gratia, a b maior arcu a g, itemq; d e maior d 3. describātur itaq; super duobus polis a & d, secundum distantias æquales a g & d 3 circuli g h & 3 k, quos huius æquales arguit. ex portionibus autem æqualibus, supra diametros eorū erectis duo arcus h b & k e absumuntur æquales, quorū uterq; minor est dimidio arcu portionis suæ. est autē arcus g h similis arcui 3 k ex hypothesi & huius, & ideo æqualis eidem, q circuli sui æquales existant, quare per huius linea b g, si producta fuerit, æquabitur lineæ e 3. unde & arcus b g & e 3, quorum ipsæ sunt cordæ, æquales reperientur. Tres igitur arcus triangulū a b g claudentes, tribus triangulum d e 3 ambientibus, æquales habentur, angulusq; a unius angulo d alterius æqualis, unde & per præcedentem reliquos angulos unius reliquis duobus angulis alterius æquales uideri necesse est, pro quibus hactenus fatigati sumus.



XXXVII.

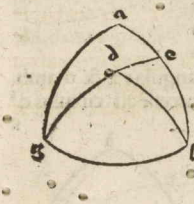
Omnis trianguli duo quælibet latera tertio reliquo sunt longiora.



Duo latera a g & g b trianguli a b g collecta dico esse longiora latere a b. Si enim latus a g æquale fuerit lateri a b, aut longius eo, planum est duo latera a g & g b congregata superare latus a b. Si uero minus eo fuerit secundum distantiam a g, super polo a describatur circulus, cuius arcus g d latus triāguli a b offendat in puncto d. Supra diametrum itaq; circuli g d erecta est portio circuli, ex qua sumptus est arcus d b minor dimidio arcu portionis suæ, quare per huius linea b d recta, si producta fuerit, breuior est linea b g, unde & arcus b d breuior arcu b g. adiectis igitur utrobiq; æqualibus a g & a d arcubus, erit per communem scientiam aggregatum ex duobus arcubus a g, g b maius aggregato ex duobus arcubus a d, d b scilicet arcu a d, quod libuit absoluere. Non aliter de duobus reliquis quibuscunq; ad tertium collatis procedemus.

XXXVIII.

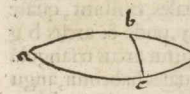
Si à duobus pūctis terminalibus unius lateris trianguli duo arcus exierint, intra angulum ipsum concurrentes, erunt ipsi collecti minores duobus reliquis trianguli lateribus.



A duobus pūctis b & g terminātibus latus b g triāguli a b g exeant duo arcus b d & g d, intra triangulum confluentes in puncto d. Dico, q; duo arcus b d, d g congregati, minores sunt duobus arcubus a b & a g coniunctis. Protendatur enim arcus g d in e punctum lateris a b, eruntq; per præcedentem duo arcus g a, a e longiores arcu g e. quare adiecto communi e b fient duo arcus g a, a b longiores duobus g e & e b. item duo arcus d e, e b longiores sunt arcu d b, facto igitur d g communi: erunt duo arcus g e, e b longiores duobus g d, d b, sed erāt duo arcus g a, a b longiores duobus g e, e b, multo igitur longiores habebūntur duobus arcubus g d & d b cōiunctis. unde & illi uicissim minores istis, q̄d uoluimus pertractare. Cōstat autem ex dictis, q; si ab aliquo puncto terminali lateris trianguli arcus, producatur latus sibi oppositum secans, erunt duo arcus scilicet producti, & ex latere trianguli resectus minores duobus trianguli lateribus.

XXXIX.

Cuiuslibet trianguli sphæralis tria latera duobus semicirculis esse minora.



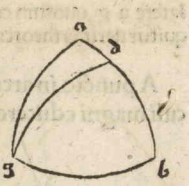
Producantur duo latera a b & a c ut concurrāt in d. erit itaq; b c minor duobus arcubus b d & c d, adiectis itaq; communibus a b & a c, tres arcus a b, a c & b minores erunt duobus semicirculis a b d & a c d.

XL.

Cuiuslibet trianguli duos æquales angulos habentis, duo quoq; ateral eos respicientia æquari necesse est.

Habeat

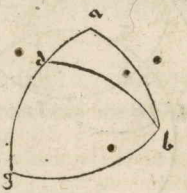
Habeat nanq; triangulus a b g duos angulos b & g æquales. Dico, q̄ latus a b æquabit̄ lateri a g. Si enim non, alterum altero maius erit, sitq; a g longius ipso a b ex quo abscindam arcum g d æqualem arcui a b producendo arcum b d. Duo itaq; triangvli a b g & b g d bina latera habent æqualia, angulosq; hisce contentos lateribus æquales, angulum uidelicet a b g æqualem angulo b g d ex hypothesi. quare per huius angulus d b g æqualis erit angulo a g b, quem hypothesis subiecit æqualem angulo a b g. unde & angulus d b g angulo eidē a b g æqualis habebit̄: pars scilicet toti, q̄d est impossibile. Nō erit ergo alter altero maius, & ideo æqualia inuicē relinquent̄, quod expectabas demonstrandū.



XLI.

Duo latera cuiusuis trianguli æqualia angulos æquales subtendere oportet.

Hæc conuertendo præmissam ex passione eius subiectū inferre suum pollicetur. Triangulus ergo a b g duo latera a b & a g habeat æqualia. Dico q̄ angulus g æqualis erit angulo b. Non enim alter eor̄ altero maior esse potest. quod si forsitan ita arbitreris, sit angulus g maior angulo b, fiatq; per huius iuxta terminum g arcus b g angulus b g d æqualis angulo a b g, producto arcu g d. Trianguli itaq; d b g duo anguli d b g & d g b æquales sunt, quare per præcedentem duo eius latera d b & d g sibi inuicem æquabuntur. adiectoq; cōi arcu a d erit aggregatū ex duobus arcubus a d, d g æquale arcui a b, qui ponebatur æqualis arcui a g. Vnde & aggregatum ex duobus arcubus a d, d g æquabitur arcui a g, quod est impossibile, repugnans huius. Deceptus igitur affirmabas alterum altero maius esse, quare propositioni nostræ assentire compelleris. Hanc autem & præcedentem ostensiue potuimus demonstrare, uerum breuiores in omni opere uias eligendi fuit consilium.



XLII.

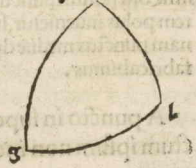
In omni triangulo sphærali maiorem angulū longius subtendit latus.

Angulus enim b trianguli a b g maior occurrat angulo g. Dico q̄ latus a g longius est latere a b. iuxta punctum enim b arcus b g fiat angulus d b g æqualis angulo a g b. erit igitur per huius arcus d b æqualis arcui d g. adiectoq; arcui a d cōi erit arcus a g æqualis aggregato ex duobus arcubus a d, d b. quod quidē aggregatū per huius maius est latere a b. unde & latus a g latere a b lōgius habebit̄, q̄d placuit addiscere.

XLIII.

Longiori demū lateri trianguli cuiuslibet maiorē opponi angulum.

Sit triangulus a b g latus a g longius latere suo a b habens. Dico q̄ angulus a b g maior erit angulo a g b. Nō enim potest esse æqualis ei, sic enim per huius latera a b & a g conuincerentur æqualia, sed neq; minor eo potest haberi. sic enim angulus a g b maior esset angulo a b g, & ideo ex præcedenti latus a b longius

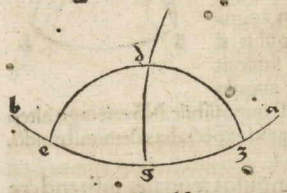


L 3 latere

latere a g, quorum cum utrunq; contrarium sit hypothesi, destructis ipsis, relinquitur ueritas theorematis nostri, quam deducere sperabamus.

XLIIII.

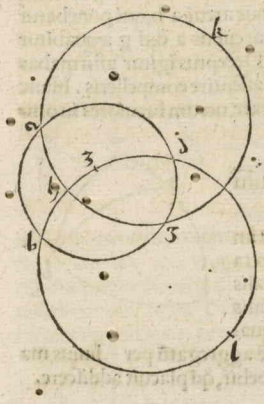
A puncto in arcu circuli magni signato, orthogonalem arcum circuli magni educere.



Sit arcus huiusmodi a b, a cuius puncto g libet educere orthogonalē. Super puncto g tanq; polo secundum distantiam quantamlibet minorem tamen diametro sphæræ describatur circulus e d 3, oportet autem arcum e d, e 3 esse semicircumferentiam, circulus enim magnus a b per polos circuli iam descripti e d 3 transit, secetur ergo arcus e d 3 per medium in puncto d, per duoq; puncta d & g arcus circuli magni dirigente huius producatur, qui sit d g, hunc dico esse orthogonalem ad arcum b g, erit enim per huius angulus a g d æqualis anguło b g d. per diffinitionem igitur arcus d g orthogonaliter insidebit arcui a b, quod libuit efficere. Q. d. si polus circuli a b datus fuerit, facilius operabimur, ipsum nanq; puncto g copulabimus per arcum circuli magni, qui orthogonalis erit ad arcum a b, circulo illius per polū alterius trāseunte.

XLV.

Circuli in sphæra nobis propositi polum inuenire.



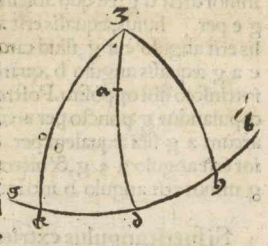
Sit circulus a b g d in sphæra signatus, siue maior siue minor existat, cuius polū reperire libet. Describe circulum, ut libet, secantem circulum a b g d propositum, quod facile uidebit, si super aliquo puncto circunferentiæ a b g d secundum quantitatem minorem diametro circuli a b g d circulum circū duxeris, qui sit a g k. utrunq; autem arcuum a b g & a h g per medium scindas, hunc quidē in puncto b, illum uero in puncto h, & per duo puncta b & h circulum magnum b h 3 d producas huius docente, cuius arcum b h d, quem resecat circulus a b g d propositus per medium partiaris in puncto 3, quē oportet esse polum circuli propositi. Nā per partem huius circulus b h 3 d transit p̄ polos circuli a b g d. oportet autem polum æqualiter distare à punctis b & d in circumferentia circuli a b g d signatis, quod profecto nulli puncto arcus b h d conuenit præter ipsum punctum 3, quod facillime ostenditur, punctus igitur 3 est polus circuli a b g d quæsitus. Reliquus autem polus inuenietur, si reliquus arcus circuli b h 3 d per medium diuisus fuerit, nam punctus mediæ diuisionis erit polus ille, cuius demonstrationem ut antehac fabricabimus.

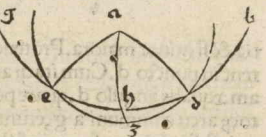
XLVI.

A puncto in superficie sphæræ signato ad arcum circuli magni punctum ipsum non includentis, perpendicularem demittere.

Sit pun

Sit punctus a extra arcū b g signatus, à quo ad arcum ipsum demittere libet perpendicularem. Per præcedētem inueniatur polus circuli, cuius est arcus b g, quí sit 3, ducaturq; per duo puncta 3 & a circulus magnus, quemadmodū huius docuit, cuius arcus 3 d occurrat arcui b g si possibile est, aut ipsi quantum oportet prolongato in puncto d. Dico q̄ arcus 3 d est perpendicularis ad arcum b g. Circulus enim 3 a d per polum 3 circuli b g transiēs orthogonalis ad eum est ex huius, quod & arcubus ipsorum circulorum accidere necesse est. quicquid enim de inclinatione aut erectione arcuū ad arcus dicitur, non nisi ex habitudine circulorum suorū trahitur. Forsitan illud te non satiat, pone igitur arcum h d quantumlibet æqualem arcui d k, duoq; pūcta h & k puncto 3 polo scilicet circuli b g connectas per duos arcus circulorū magnorum qui sint 3 h & 3 k, ut docuit huius. duo itaq; trianguli 3 d h & 3 d k terna latera habent æqualia, quare per huius angulus 3 d h æquabitur angulo 3 d k, & ideo arcus 3 d propter quod & a d perpendicularis est ad arcum b g, quod uolebas declarandum. Aliter idem efficies. Super puncto a facto polo describe circulum, cuius circumferentia secet arcū b g, si possibile est, aut eum prolongatum quoad satis est in duobus punctis d & e, diuidaturq; arcus d e per medium in puncto h, qui continuetur cum puncto a per arcum circuli magni a h, quem oportet esse perpēdicularem ad arcum b g. producam enim duos arcus circulorum magnorum a d & a e. duo igitur trianguli a h d & a h e trina latera habent æqualia, latere a h communi existente, quare per huius angulus a h d æqualis est angulo a h e, & ideo per diffinitionem arcus a h perpendicularis est ad arcum b g, quod libuit attingere.

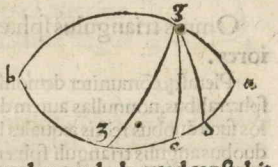




XLVII.

In triangulis sphæralibus educto latere uno, contingit angulum ex trinsecum alteri intrinsecorum sibi oppositorum nunc esse æqualem, nunc uero maiorem, interdum etiam minorem eo.

Duorum enim circulorum ad se inclinatorū semicircumferentiæ coincidant in punctis a & b, abscindaturq; ex una earum arcus a g minor quadrante, à cuius termino g ad arcum a b substratum perpēdicularis arcus circuli magni descendat g d, erit itaq; trianguli a g d angulus a d g rectus maior angulo acuto d a g, angulo scilicet inclinationis. est autem angulus a æqualis angulo b, quod constabit per huius descripto circulo secundū distantiam quantamlibet minore diametro sphæræ super polo a, & ideo angulus a d g extrinsecus ad triāgulum b g d maior est intrinseco angulo b sibi opposito. Rursus cū sit arcus a g minor quadrante, maior autem arcus a d per huius, erit & arcus a d minor quadrante, & ideo

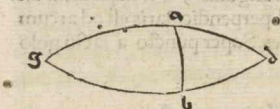


minor

minor arcu d g, ex quo abscindatur ei æqualis arcus d e. productus itaq; arcus g e per huius, æqualis erit arcui a g, quare per huius angulus a e g æqualis erit angulo e a g, illud tamen sola huius inferre potuit, est autem angulus e a g æqualis angulo b. quare angulus extrinsecus a e g æquabitur angulo b intrinseco sibi opposito. Postremo signetur punctus quilibet in arcu e b, qui sit 3 cōpulandus g puncto per arcum 3 g, qui profecto superabit arcum e g, & ideo arcum a g sibi æqualem; per igitur huius angulus a 3 g æqualis angulo b maior erit angulo a 3 g, & uiceuersa angulus a 3 g extrinsecus ad triangulum b 3 g minor erit angulo b intrinseco sibi opposito. quæ proposuimus lucubrare.

XLVIII.

Si fuerit angulus extrinsecus æqualis alteri intrinsecorum ei oppositorum, aggregatum ex lateribus reliquum angulum intrinsecum ei oppositū ambientibus, æquabit semicircumferentiæ. si uero maior intrinseco sibi opposito, erit aggregatū huiusmodi minus, & si minor, ipsum maius.



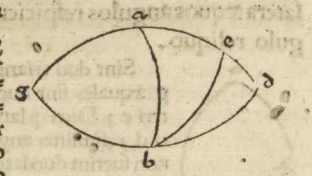
Sit triangulus a b g, cuius latere g b, producto ad partē puncti b, fiat angulus extrinsecus æqualis intrinseco sibi opposito angulo a g b. Dico q̄ duo latera g a & a b collecta æquabunt semicircumferentiā. si uero maior fuerit angulo g, ipsa duo latera minora habebuntur semicircumferentia, & si minor maiora. Protendantur enim duo arcus g a & g b donec concurrent in puncto d. Cum itaq; angulus a b d æqualis fuerit angulo g, erit ipse etiam æqualis angulo d. quare per huius arcus a b æqualis erit arcui a d, adhibito q̄; arcu communi a g, erunt duo arcus b a & a g collecti æquales arcui g d, qui est semicircumferentia. & hoc erat primum. Quod si angulus a g d maior fuerit angulo g, erit & ipse maior angulo d. quare per huius arcus a d superabit arcum a b. adiecto q̄; cōi a g, erunt duo arcus b a & a g cōiuncti minores arcu g d, quem constat esse semicircūferentiam. Aperta igitur est pars secunda. Postremo si angulus a b d minor existat angulo g, minor quoq; erit angulo d. arcus ergo a b per allegatam maior inuenietur arcu a d. cōiq; sociato arcu a g erit aggregatum ex duobus arcubus b a, a g maius arcu g d, qui est circumferentiæ dimidiū. Verum itaq; hoc enunciauimus theoremate. Conuersam autē huius medijs utendo conuersis demonstrare haud uidebitur difficile.

XLIX.

Omnis triangulus sphæralis tres habet angulos duobus rectis maiores.

Pleraq; cōmuniter demonstrare solemus passiones de triangulis & planis & sphæralibus, nonnullas autem differenter. Sphæralibus enim nō accidit tres angulos suos duobus rectis æquales habere, quemadmodum planis. quo fit, ut cognitis duobus angulis trianguli sphæralis non pendeat inde tertij anguli cognitio. Ne igitur circa hæc quempiā errare contingat, monimento theorematis huius cautiorem reddere libuit. Sit itaq; triangulus a b g sphæralis. Dico q̄ tres eius anguli a, b, & g, maiores sunt duobus rectis. Prolōgatis enim arcubus g a & g b, donec in puncto d concurrent, erit angulus extrinsecus a b d per huius aut æqualis intrinseco angulo b a g sibi opposito, aut minor eo aut maior. Si æqualis adiecto

cto cõmuni angulo a b g, erunt duo anguli a b g & b a g æquales duobus a b d & a b g, quos liquet æquales esse duobus rectis, quare & duo anguli a b g & g a b æquabuntur duobus rectis. & ideo tres anguli a, b, & g, duos superabunt rectos. Si uero angulus a b d minor fuerit angulo b a g, quoniã ipse cũ angulo a b g duobus rectis æquatur, erunt duo anguli a b g & b a g maiores duobus rectis. Tres igitur anguli trianguli a b g multo maiores erunt duobus rectis. Quòd si angulus a b d maior fuerit angulo b a g, fiat iuxta punctũ b arcus a b, angulus a b e æqualis angulo b a g producto arcu b e semicircũferentiæ d a g, occurrẽte in puncto e. Cum itaq; angulus b a g extrinsecus æqualis sit intrinseco angulo a b e trianguli a b e, erũt duo arcus a e & e b coniuncti per præcedentem æquales semicircũferentiæ g a d, ablatoq; cõi arcu a e, manebit arcus b e æqualis duobus arcubus a g & e d. maior itaq; est arcus b e ipso e d arcu. quare per huius angulus b d e maior angulo e b d habebitur. Est autẽ angulus b d e æqualis angulo a g b, quare & angulus a g b maior est angulo d b e. adiectis igitur æqualibus angulis a b g & b a g, item a b g & a b e, erunt tres anguli trianguli propositi maiores tribus angulis a b g, a b e & e b d, quos constat esse duobus rectis æquales. unde tres anguli dicti maiores erunt duobus rectis, quod oportuit demonstrare.



L.

Si fuerint duo latera unius trianguli æqualia duobus lateribus alterius, angulorum autem hisce æqualibus lateribus contentorum alterò altero maior, erit quoq; basis maiorem subtendens angulum unius maior basi alterius.

Duo trianguli a b g & e d 3 bina latera habent æqualia, a b quidem æquale d e, & a g æquale ipsi d 3, angulus autem a maior sit angulo d. Dico q; basis b g longior est basi e 3. Similem passionem 24. primi Euclidis de triangulis planis concludit. Modus autem demonstrandi hanc & illam non est uarius.

LI.

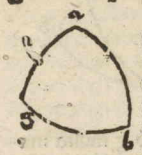
Si fuerint duo latera unius trianguli æqualia duobus lateribus alterius, basis autem unius maior basi alterius, erit & angulus longiorem basim respiciens maior angulo breuiorem respiciente basim.

Hæc conuertit præcedentem, & correspondet 25. primi Euclidis. Quemadmodum autem illa ex 4. & 24. primi Euclidis ad impossibile demõstratur, ita hæc ex huius & præcedenti ad inconueniens ducendo aduersarium, ueritatem probatur habere necessariam.

LII.

Omnium duorum triangulorum binos angulos æquales habentium, duoq; latera æqualibus subiecta angulis æqualia, reliqua quoq;

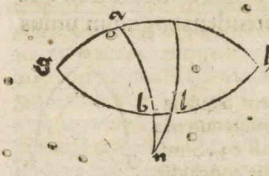
latera æquos angulos respicientia sunt æqualia, & angulus reliquus angulo reliquo.



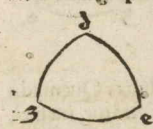
Sint duo triangula a b g & d e ʒ, quorum duo anguli b & g æquales sint duobus angulis e & ʒ, latusq; b g æquale lateri e ʒ. Dico q; latus a b æquabitur lateri e d, & latus a g lateri d ʒ, similiter angulus a angulo d æqualis habebitur. Si enim non fuerint duo latera a b & d e æqualia, erit alterum altero maius. ex maiori igitur eorum quod sit, uerbi gratia, d e, abscindatur arcus e h æqualis a b producendo arcum ʒ h. sequitur itaq; per huius angulum e ʒ h æqualem esse angulo a g b, qui ponebatur æqualis angulo d ʒ e. angulus igitur e ʒ h æqualis erit angulo d ʒ e pars toti, quod est impossibile. Non potest igitur alterũ duorum laterum a b & d e altero maius esse, quare & æqualia habebuntur. Similiter probabis duo latera a g & d ʒ esse æqualia, angulum postremo a æqualem angulo d. conuincet huius, aut quæ decuit stabilire.

LIII.

Omnium duorum triangulorum binos angulos habentium æquales, duoq; latera æqualibus opposita angulis æqualia, latera uero reliquos æquales respicientia angulos coniuncta non æqualia semicircũferentiæ, bina latera reliqua erunt æqualia, & angulus reliquus angulo reliquo.



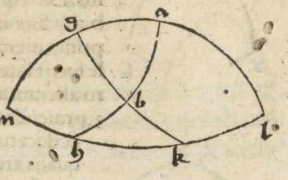
Sint duo anguli b & g trianguli a b g æquales duobus angulis e & ʒ trianguli d e ʒ, latusq; a b æquale lateri d e: duo autem latera a g & d ʒ coniuncta semicircumferentiæ non æqualia. Dico q; latus a g æquale erit lateri d ʒ, latusq; b g æquale lateri e ʒ, & angulus a æqualis angulo d. Producam enim duos arcus g b & g a donec concurrent in puncto h, scindamq; ex semicircumferentia h b g arcum h l æqualem arcui e ʒ. & ex semicircumferentia h a g arcum h k æqualem arcui d ʒ, necesse est autem punctum k aliud esse ꝙ punctum a, q; duo arcus a g & d ʒ non æquentur semicircumferentiæ, continuaboq; duos arcus a b & k l donec concurrent in puncto n, erit autem per huius arcus b l æqualis arcui d e, sed & angulus h l k æqualis angulo d e ʒ, itemq; angulus h k l æqualis angulo e d ʒ. ponebatur autẽ angulus d e ʒ æqualis angulo a b g. quare & angulus h l k æqualis erit angulo a b g, unde & eorũ contrapositi uidelicet n b l & n l b æquales erũt, quare per huius duo arcus b n & n l æquales erũt. cumq; duo arcus a b & k l sint æquales, est enim uterq; eorũ æqualis arcui d e, erit totus arcus a n æqualis toti arcui k n, & ideo per huius angulus n a k æqualis angulo n k a, residuisq; ex duobus rectis anguli scilicet b a g & h k l inuicem æquabuntur. erat autem angulus h k l æqualis angulo e d ʒ, quare & angulus b a g æquabitur angulo e d ʒ. duo itaq; trianguli a b g & d e ʒ duo latera a b & d e habentes æqualia, binosq; angulos his lateribus insidentes æquales, per præmissam itaq; quod reliquum est absoluemus.



Quicunq;

LIIII.

Quicunq; duo trianguli trinos angulos habent æquales, & trina latera habebunt æqualia.

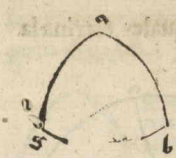


In eadem sphæra aut diuersis æqualibus tamen sint duo trianguli a b g & d e 3, quorum unius tres anguli tribus angulis alterius singulatim sint æquales. Dico q; tria latera unius eorũ tribus lateribus alterius æqualia habebunt, latera qdẽ æquos angulos respicientia ad se cõferendo. Producã em̃ duos arcus a b & g b ad partẽ puncti b, ponamq; arcũ b h æqualẽ arcui d e, arcũ aũt b k æqualẽ e 3, & per duo puncta h k ducã arcũ circuli magni, quẽ cõtinuabo utrinq; donec cũ arcu a g utrinq; protenso concurrat in duobus punctis l & m. Cum itaq; duo latera triãguli h b k sint æqualia duobus lateribus triãguli d e 3, & anguli hisce cõtenti lateribus æquales, angulus uidelicet h b k æqualis angulo d e 3, erit per huius & basis h k unius basi d 3 alterius æqualis. angulus quoq; b k h æqualis angulo d 3 e, sed & angulus b h k æqualis angulo e d 3. duo autem anguli d & 3 ponebantur æquales duobus a & g. quare angulus b k h extrinsecus ad triangulum g l k æquabitur angulo a g b intrinseco, & ideo per huius aggregatum ex duobus arcubus g l & l k æquabitur semicircumferentiæ. Similiter angulus g a b extrinsecus ad triangulum a l h, intrinseco angulo b h k siue a h l æqualis: duos arcus a l & l h collectos æquari conuincet semicircumferentiæ, demptis ergo communibus arcubus a l & l k, relinquetur arcus a g æqualis arcui h k. Duo itaq; trianguli a b g & b h k duo latera a g & h k habẽt æqualia, angulosq; binos ipsis insidentes lateribus æquales, quare per huius triangulus a b g æquilaterus & æquiangulus erit triangulo h b k, qui prídem æquilaterus & æquiangulus demonstrabatur triangulo d e 3, unde & duo trianguli a b g & d e 3 trina latera habebunt æqualia, quod erat absoluendum. Ne autem suspiceris arcum a g utrinq; protensum occurrere arcui h k in punctis h & k: sic em̃ cassaretur forma argumentationis nostræ, ostendemus id fieri non posse. Nam si ita accideret, fieret arcus h g a k semicircumferentia per huius, q; duæ circumferentiæ circulorum magnorum se secarent in duobus punctis h & k, similiter oportet arcum g a k esse semicircũferentiam. cũq; omnes semicircũferentiæ unius circuli sint æquales, fieret pars æqualis toti, quod est impossibile. Idem sequeret si arcus a g continuatus alteri duntaxat duorum punctorum h & k occurreret, oportet igitur duo puncta l & m esse diuersa à punctis k & h.

LV.

Omnes duos triangulos, quorum duo latera unius sunt æqualia duobus lateribus alterius, duoq; anguli eorum duobus æquis lateribus oppositi æquales, reliqui uero duo anguli eorum reliquis duobus æquis lateribus oppositi, aut ambo acuti, aut ambo obtusi, æquilateros & æquiangulos esse necesse est.

Duo latera a b & a g trianguli a b g æqualia sint duobus lateribus d e &

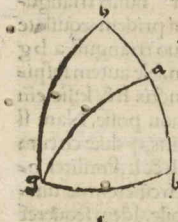


d 3 trianguli d e 3, dextrum uidelicet dextro & sinistrum sinistro, angulusq; g æqualis angulo 3, uterq; autem angulorum reliquorum b scilicet & e, aut acutus, aut uterq; obtusus. Dico q; angulus a æqualis erit angulo d, angulus etiam b æqualis angulo e, & latus a b æquale lateri d e. Sit enim primo uterq; angulorum b & e acutus, si itaq; latus b g æquale fuerit lateri e 3, per huius concludemus intentum. Si uero alterum altero maius fuerit, sit uerbi gratia b g longius e 3, protendaturq; arcus 3 e in h, ut 3 h arcus æqualis fiat b g & ducatur arcus d h. erit igitur per huius arcus d h æqualis arcui a b, & angulus d h 3 æqualis angulo a b g. ponebatur autem arcus a b æqualis arcui d e, quare duo arcus d h & d e sibi æquabuntur, & ideo per huius angulus d h e æqualis angulo d e h. cunq; angulus d h e sit acutus propter angulum a b g ei æqualem acutū, erit & angulus d e h acutus, unde angulus d e 3 obtusus habebitur, quod est contrariū posito. Nō aliter procedemus,

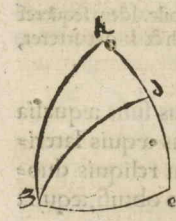
si aduersarius arcum e 3 maiorem arbitretur arcu b g. Qd si posuerimus utrūq; angulorū b & e obtusum, concludemus simili argumentatione angulū e esse acutum. Volenti igitur contradicere propositioni nostræ, concluditur eundem angulum esse acutum & obtusum, quod cum esse nequeat, manifesta relinquetur ueritas theorematis.

LVI.

Omnes trianguli rectanguli bina latera habentes æqualia, utraq; autem latera rectos angulos ambientia minora quadrante diuisim, æquianguli & æquilateri comprobantur.



Sint duo trianguli a b g & d e 3, quorū angli b & e sunt recti, utrunq; autem laterū a b & b g trianguli a b g minus quadrante, similiter utrunq; d e & e 3 minus quadrante, duo q; latera unius duobus reliqui lateribus quibuscūq; sint æqualia. Dico q; reliquū latus unius æquale erit reliquo lateri alterius, & anguli reliqui unius angulis reliquis alterius; hoc est, ipsi duo trianguli æquilateri erunt & æquianguli. Si enim bina eorū latera æqualia circa rectos fuerint angulos, per huius constabūt omnia. Si aūt latera huiusmodi æqualia anguli



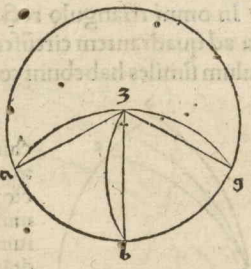
los ambiant alios, sint uerbi gratia duo latera b a, a g æqualia duobus e d, d 3, dextrū dextro & sinistrum sinistro comparando, producaturq; uterq; arcuum b a & e d, donec fiat quadrans, b a quidem ad h, & e d ad k, erunt itaq; puncta h & k poli circulorum b g & e 3, à quibus demittant duo quadrantes h g & k 3, quos æquales cōstat, cum in una sphæra aut duabus æqualibus eos imaginari soleamus. est autē & arcus a h æqualis arcui d k. hi em duo sunt complementa duorū arcuū a b & d e, qs æquales tradidit hypothesis. per igit huius duobus arcubus a g & d 3 æqualibus existentibus, erit angulus h a g æqualis angulo k d 3, unde & residui ex duobus rectis anguli scilicet b a g & e d 3 nō erūt inæquales, ponebant aūt & duo arcus b a, a g æquales duobus e d, d 3. quare per huius triangulos propositos æquiangulos conuincet & æquilateros, quæ fuere ducenda.

Finis tertij trianguloꝝ.

LIBER QVARTVS TRIANGVLORVM.

I.

Si à polo circuli magni in sphæra ad circumferentiam ipsius, aut arcum eius arcum magnum demiseris, arcus ille demissus erit quadrans, perpendicularis circumferentiæ, duos angulos supra arcum, cui incidit, rectos secernens.



Sit circulus magnus in sphæra a b g, à cuius polo 3 demittatur arcus circuli magni qui sit 3 b. Dico ꝙ arcus 3 b erit quadrans circumferentiæ magnæ, & uterq; angulorũ a b 3 & 3 b g rectus erit. Producam enim lineam polarem circuli a b g, quæ sit 3 b, quam per tertij huius oportet esse latus quadrati inscripti circulo magno. quatuor autem latera quadrati huiusmodi, cũ sint æqualia, quatuor abscindunt æquales arcus per tertij, ex circũferentia circuli, quorũ unus est arcus 3 b, arcus igitur 3 b est quadrans circuli. Præterea circulus, cuius est arcus 3 b, transit per polũ 3 circuli a b g, quare erectus est ad eum per tertij huius, quod non potest esse, nisi uterq; angulorũ a b 3 & 3 b g sit rectus. Sed fortasse infirmam suspicaris hãc argumentationem, describe igitur super polo b secundũ quantitatem b 3 circulũ in sphæra, cuius semicircumferentia sit a 3 g arcus, erit itaq; ex eis, quæ super hoc theoremate præsenti primũ diximus, uterq; arcuũ a 3 & 3 g quadrans circũferentiæ, quare per tertij huius duo anguli a b 3 & 3 b g æquales declarantur, per diffinitionem igitur arcus 3 b est perpendicularis ad circumferentiam circuli a B g, quæ fuerunt explananda.

II.

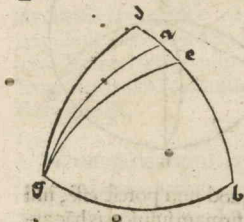
Si ab aliquo puncto arcus circuli magni quadrans magnus orthogonaliter egrediatur, terminus eius erit polus circuli à quo egredieba tur quadrans ipse, cum quo declarabitur punctum concursus duorum arcuum orthogonaliter à tertio arcu exurgentium, esse polum circuli arcum ipsum continentis.

A puncto b arcus a b g circuli magni orthogonaliter egrediatur quadrans circuli magni b 3. Dico ꝙ punctus 3 terminus uidelicet quadrantis egressi erit polus circuli a b g. Subtensa enim quadranti dicto corda sua b 3, quam constat esse costam quadrati magni, secundũ eius quantitatem describat circulus magnus, cuius semicircumferentia sit a 3 g. cunq; duo anguli a b 3 & 3 b g sint æquales hypothesi id exigente, erunt per tertij huius duo arcus a 3 & 3 g similes, unde & æquales, ꝙ de eadem circumferentia existant, est autem arcus a 3 g semicircumfe

rentia circuli magni, quemadmodũ trahitur ex tertij huius, quare uterq; arcuũ a 3 & 3 g est medietas semicircumferentiæ, & ideo quadrans circũferentiæ totius circuli magni. tres igitur arcus a 3, b 3 & g 3 æquales sunt quadrantes circumferentiæ magnarũ æqualium, quare per tertij cordæ eorũ æquales declarantur. & puncto itaq; 3 ad circumferentiam circuli a b g tribus æqualibus rectis descendentibus tertij huius punctũ 3 polum circuli a b g declamabit, quod uolebamus aperire. Corollariũ autem sic constabit. In utroq; arcuũ orthogonaliũ, quantum sat est protensorũ, necesse est inueniri polũ circuli huiusmodi, quemadmodum ex præsenti trahitur, aut igitur punctus coincidentiæ duorũ arcuũ orthogonaliũ est polus, aut duo erunt poli unius circuli ex eadem parte, sed nullus circulus duos ex eadem parte polos habet per tertij. punctus igitur in quo confluũt dicti arcus orthogonales, polus circuli, & cuius arcu egrediunt ipsi habebitur.

III.

In omni triangulo rectangulo latera rectum angulum continentia ad quadrantem circũferentiæ & anguli eis oppositi ad rectum angulum similes habebunt comparationes.



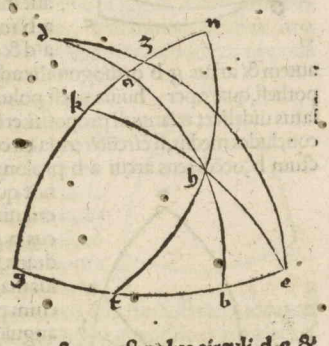
Volo dicere. Si angulus, qui uni ex lateribus rectum angulũ continentibus, opponitur recto, fuerit æqualis, latus ipsum quadranti æquale erit. si maior recto, & ipsum latus quadrante maius. si minor, ipsum minus quarta circũferentiæ. Versa demũ uice. Si alterum ex huiusmodi lateribus rectum ambientibus quadrãs existat, angulus ei oppositus erit rectus. si maius quadrante, maior recto erit angulus. & si minus, minor. Sit igitur exempli causa triangulus sphæralis a b g, ex arcubus circulorũ magnorũ constitutus, angulũ b rectum habens. Dico q; si angulus g rectus fuerit latus, a b erit quadrãs. si uero recto maior, arcus a b quadrantem superabit, & si minor recto extiterit, arcus a b quadrante minor habebitur. Similiter, si arcus a b quadranti æqualis occurrat, angulus g rectus erit. si uero quadrante maius, & angulus g rectũ superabit. & si minus quadrante, angulũ g recto minorem enunciabimus, quæ sic habebis. Sit primo angulus g rectus, uterq; igitur circulorũ, in quibus sunt duo arcus a g & a b, erectus est ad superficiem circuli, cuius est latus tertium b g, transibitq; per polum circuli b g. cũ autem hij duo arcus in puncto a coincidant, erit a polus circuli b g magni, quare per corollarium tertij huius arcus a b respiciens angulũ g, erit quadrans circumferentiæ. Sit deinde angulus a g b maior recto, & fiat iuxta punctũ g arcus b g angulus rectus b g e, docente tertij huius, producendo arcũ g e. erit itaq; e polus circuli b g, & ideo arcus e b quarta circuli, quare arcus a b angulũ a g b subtendens quadrantem superabit. Qd si angulus a g b minor fuerit recto, statuatur angulus d b g rectus, eritq;, quemadmodũ antea conclusum est, d polus circuli b g, & arcus d b quadrans circũferentiæ, quare arcus a b angulũ a g b subtendens minor quadrante. Præterea ponamus arcũ a b quartam circumferentiæ, eritq; propter hoc a polus circuli b g, & ideo arcus a g erectus ad arcũ b g, angulus ergo a g b rectus habebitur. Sed intelligatur arcus a b maior quadrante, fiatq; arcus e b quarta circuli, & ideo e polus circuli b g, arcus itaq; e g erectus erit ad arcum b g, & angulus e g b rectus, quare angulus a g b maior

recto

recto. Quæ si statuerimus arcũ a b minorem quadrante, prolongetur ipse in directum usq; ad d, donec b d fiat quarta circuli, ideoq; d polus circuli b g. demisso igitur arcu d g, erit angulus d g b rectus, & angulus a g b minor recto, manifestam itaq; effecimus theorematis nostri ueritatem.

III.

In omni triangulo rectangulo, si fuerit alterum ex lateribus rectum ambientibus quarta circuli, latus quoq; rectum subtendens angulum erit quarta circuli. si uero fuerint latera rectum angulum continentia, aut ambo maiora quadrante, aut ambo minora, erit latus rectũ subtendens angulum minus quarta circuli. ꝙ si alterum maius quadrante, & alterum minus extiterit, latus rectum angulum respiciens, maius quadrante pronunciabitur.

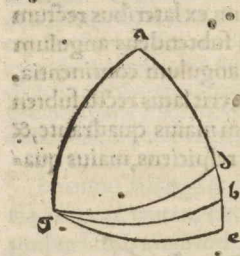


Habeat triangulus a b g angulũ b rectum, & latus a b quadrantem circumferentiæ. Dico ꝙ latus a g rectum subtendẽs angulum, erit quarta circuli. Erit enim a polus circuli b g, quare per huius arcus a g erit quarta circuli. Si uero uterq; arcuũ a b & b g minor quarta fuerit, erit arcus a g minor quadrante. fiat enim arcus g e quarta circuli & arcus b d similiter, transeatq; per duo puncta d & e arcus circuli magni d e, arcus autem g a prolongetur, donec occurret arcui d e in puncto 3. Quoniã itaq; anguli apud b sunt recti, & arcus b d quarta circuli erit d polus circuli g e, & ideo angulus e rectus, sed & e g est quarta circuli. quare punctus g est polus circuli d e, & ideo arcus g 3 est quadrans circumferentiæ, arcus igitur partialis a g minor quadrante fiet. Sit deinceps uterq; arcuũ a b, b g maior quadrante. Dico ꝙ arcus a g erit minor quarta circumferentiæ. Abscindam enim utrunq; arcuũ g t & b h quadrantem, per duo q; puncta t & h producam arcum circuli magni occurrentem arcui g a continuato in n, quoniam itaq; angulus b est rectus, & arcus b h quarta circuli, erit h polus circuli b g, & angulus apud t rectus. cumq; arcus t g sit quarta, erit g polus circuli t n, quare arcus g n est quarta, & ideo arcus a g minor quadrante. Postremo sit arcus a b maior quarta, & arcus b g minor. Dico ꝙ arcus a g maior erit quadrante. Fiat enim uterq; arcuũ g e & b h quarta circuli, prolongando quidem arcum g b usq; ad e, arcũ autem b h resecando ex arcu a b, incedatq; arcus circuli magni per duo puncta h & e, occursurus arcui a g in puncto k. Cum igitur arcus b h est quarta, & angulus b rectus, erit h polus circuli g b e, quare & angulus apud e rectus. est autẽ & arcus e g quadrãs. g igitur est polus circuli e k, quare arcus g k erit quarta circuli, unde & a g arcus quadrantem superare dinoscitur, quæ fuere concludenda.

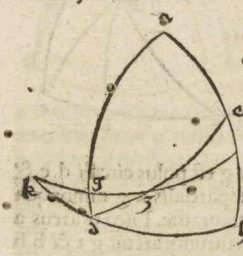
V.

In omni triangulo rectangulo si fuerit latus rectum subtendens angulum quarta circuli, erit alterum ex duobus rectũ ambientibus quarta cir

ta circuli. Si uero fuerit minus quadrante, erit utrunq; reliquorū aut maius quadrante, aut minus eo. q; si ipsum fuerit maius quadrante, erit alterum ex duobus rectum ambientibus quadrante maius, reliquum autem minus eo.

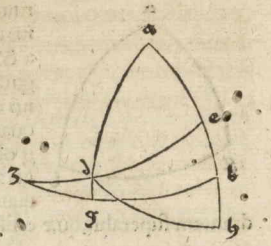


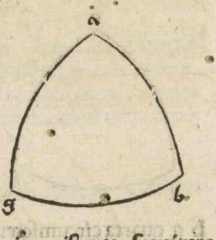
Hæc est conuersa præcedentis. Sit itaq; in trian gulo a b g angulum b rectum habente, latus a g quadrans circumferentiæ. Dico q; alteꝛ duorū late rum a b, b g erit quarta circuli. Super puncto em̄ a facto polo, secundū quantitatem a g describat circulus, quem oportebit esse magnū, q; arcus a g sit quarta circumferentiæ magnæ. si igitur circum ferentia eius transibit per punctū b, planum est ar. cum a b esse quadrantem. si uero prætereat ipsum, aut ibit supra aut infra ipsum. si supra, secabit arcū a b in puncto qui sit d, per itaq; huius duo arcus a d & d g orthogonaliter sibi inuicem insistent, est autem & arcus g b orthogonalis ad arcum a b propter angulū b rectum ex hy potheſi, quare per huius g est polus circuli a b, & ideo per huius arcus g b, latus uidelicet trianguli propositi erit quarta circumferentiæ. Similem priſtinis concludes medijs, si circūferentia circuli super a polo descripti, transibit infra pun ctum b, occurrens arcui a b prolongato in puncto e. Sit demum arcus a g mi nor quadrante. Dico q; uterq; arcum a b, b g aut erit maior quarta, aut minor ea. Crescat enim ar cus a g in directum, donec habeat arcus a d qua drans, secundū cuius cordam circumducatur circu lus magnus, qui nequaq; offendet punctū b, alias enim per huius & hypotheſim sequeretur rectum angulū esse minorem recto. Aut igitur secando ar cum a b: si opus fuerit: prolongatum transibit su pra b punctū aut infra. Transeat prius supra, secās necessario arcum b g in puncto qui sit 3. erit itaq; per huius angulus 3 e b rectus. cūq; sit etiam an gulus e b 3 rectus ex hypotheſi, erit per corollariū 2. huius 3 polus circuli a b, & ideo per primam huius arcus 3 b quarta circumfe rentiæ. latus igitur b g quadrantem superabit, latus denicq; a b quadrantē exce dere nemini dubium erit: consideranti saltem arcum a e æqualem arcui a d esse quartam circumferentiæ. Sed transeat circulus dictus infra punctū b, secando ar cum a b protensum oportune in puncto h, arcum autem b g prolongatū in pūcto k, erit itaq; per media nunc commemorata, ne iusto crebrius primam atq; se cundam huius repetam propoſitiones, angulus apud h rectus, sed & angulus apd̄ b rectus ex hypotheſi, quare punctus k erit polus circuli a b, ideoq; arcus k b quadrans, & latus g b trianguli nostri quadrante minus, latus autem a b qua drante breuius esse nemo dubitabit. Tandem arcus a g rectū subtendens angulū quartam superare ponatur. Dico q; alteꝛ duorū laterum a b, b g maius erit qua drante, reliquū uero minus. Resecto enim quadrante a d, cordam ipsius sup a po lo circumferentes creabimus circulum magnū, cuius profecto circumferentia pun ctum b præteribit, alias enim monstrum nasceretur mathematicū, imo uerius im



possibile

possibile, rectus scilicet angulus recto maior. Transeat itaq; prius supra punctũ b, secando arcum a h in puncto e, arcum uero b g oportune extensum in puncto 3, quem constabit esse polum circuli a b angulis apud b & e rectis existentibus, unde & arcus 3 b circumferentiæ quarta pars habebitur. latus igitur b g trianguli a b g quadrante breuius relinquitur, latus autem reliquũ a b quadrantẽ superabit proculdubio. Qd si circumferentia dicta descenderit infra punctũ b, secando arcum a b satis porrectũ in puncto h, arcum autem b g (nam ita fieri necesse est) in puncto k, pristino freti syllogismo, declarabimus k esse polum circuli a b, & arcum b k quadrantem circumferentiæ, unde consequitur latus b g trianguli nostri quadrante longius esse, reliquũ uero latus a b quadrantis a h longitudinem haud attingit. Tres igitur theorematis partes confirmauimus, quod libuit efficere. Possumus præterea propositionem nostram stabilire, aduersariq; opositũ asserenti concludentes, impossibile per huius. Nam ponendo latus a g quadrantem si dixerit neutrũ reliquorũ laterum esse quadrantẽ, erit necessario utrunq; eorũ aut maius uel minus quadrante, aut alterũ maius & reliquũ minus. quocunq; autem horũ existente, sequitur per huius arcum a g non esse quadrantem, sic idem arcus quadrans & non quadrãs aduersario proteruienti habebitur, quod est impossibile. Si uero latus a g fuerit minus quadrante, & non fuerit utrunq; reliquorum laterum aut maius quadrante, aut minus sententia quidem aduersarij, erit necessario alterũ eorum quadrans, aut alterum eorũ maius quadrante, & reliquũ minus eo, quo ita existente, sequitur per huius arcum a g esse quadrantem aut maiorem eo, qui pridem ponebatur minor eo. Qd si latus a g maius supponatur quadrante, & credat aduersarius, alterum duorũ laterum a b & b g esse quadrantem, aut utrunq; eorum maius uel minus quadrante, concludemus ei per huius arcum a g aut esse quadrantẽ, aut quadrante breuiorem, quem nuperrime concessit esse maiorẽ quadrante. Destructis igitur impossibilibus, ad quæ duximus aduersarium, theorematis nostri fundabitur ueritas.

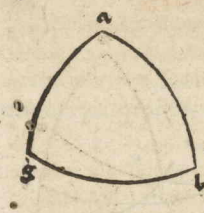




VI.

In omni triangulo rectangulo, si alter duorum angulorum, quos subtinet latus, rectum respiciens angulum, rectus fuerit, erit latus ipsum quarta circuli. si uterq; eorum aut obtusus aut acutus extiterit, latus dictum quadrante breuius erit. si uero alter eorum obtusus, reliquus aũt acutus occurrat, latus ipsum quadrante maius conijcietur.

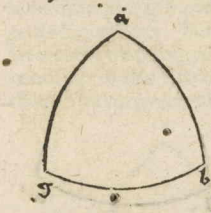
Triangulus a b g angulum g rectum habeat. Dico q; si alter duorũ angulorũ a & g rectus fuerit, latus a g erit quarta circumferentiæ. si uero uterq; eorũ aut obtusus aut acutus extiterit, latus a g quadrante breuius habebit. & si angulus a fuerit obtusus, angulus aũt g acutus uel econtra, arcus a g quadrantem superabit. Si enim alter angulorũ a & g rectus fuerit, erit per huius alterum duorum la-



rum laterum a b & b g quarta circuli, quare per huius arcus a g erit quarta circuli. Si uero uterq; angulorũ a & g aut obtusum aut acutũ sese præbeat, erit per allegatã huius utrunq; duorũ laterum a b & b g aut maius quadrante, aut minus eo. unde per huius latus a g quadrante breuius arguetur. Qđ si alter angulorũ a & g obtusus, reliquus autem acutus extiterit, erit ex huius alter duorũ arcuũ a b & b g maior quadrante, reliquus autem minor eo, quare per huius latus a g quadrantem superabit, quæ consuimus explananda.

VII.

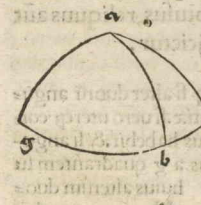
Si latus rectum angulum trianguli sphæralis respiciens quadrans circumferentiæ fuerit, alter angulorum sibi insidentium rectus indicabitur. si uero quadrante minus extiterit, erit uterq; dictorum angulorum aut obtusus aut acutus. & si latus ipsum quadrante longius offeratur, alter dictorũ angulorũ obtusus, reliquus aũt acutus prædicabit.



Hæc est cõuersa prioris. Sit triangulus a b g rectangulus, angulũ uidelicet b rectum habens. Dico q; si latus a g fuerit quadrans circumferentiæ, alter angulorũ a & g rectus erit. si uero arcus a g minor fuerit quadrãte, uterq; angulorũ a & g aut obtusus erit, aut uterq; acutus. & si arcus a g quadrantem excedat, erit alter angulorum a & g obtusus, reliquus autem acutus. Nam arcu a g quadrante existente, erit alter duorum arcuũ a b & b g quarta circumferentiæ per huius, quare per huius alter angulorũ a & g rectus concludetur. Si uero arcus a g quadrante minor extiterit, erit per eandem huius uterq; arcuũ a b & b g aut maior quadrante, aut minor eo, quare per huius uterq; angulorũ a & g aut obtusus erit, aut acutus. Qđ si arcus a g quarta circumferentiæ maior occurrat, erit alter duorũ arcuum a b & b g maior quadrante, & reliquus minor eo, quare per huius alter angulorum a & g obtusus erit, & reliquus acutus, quæ fuere declaranda.

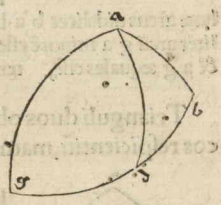
VIII.

Si quis triangulus sphæralis duos acutos habeat angulos, aut duos obtusos, arcus egrediens à uertice tertij anguli, lateri se respicienti per pendiculariter occursurus, intra triangulũ reperiet. si uero alter eorũ acutus, & reliquus obtusus extiterit, extra triangulũ necessario cadet.



Sit triangulus huiusmodi a b g, duos angulos b & g habens acutos, aut ambos obtusos. Dico q; arcus ab a puncto lateri b g: cuius utrinq; indefinito, perpendiculariter occursurus, intra triangulũ a b g consistet. Non enim poterit egredi triangulũ ipsum, quod si possibile arbitreris, sit arcus ille a d coincidens arcui g b, quantũ sat est porrecto dextrorsum in puncto d, erit itaq; arcus a d latus commune duobus triangulis a d b & a d g rectangulis

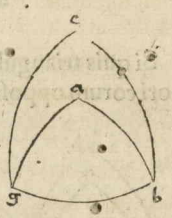
rectangulis. si igitur duo anguli b & g triāguli a b g fuerint acuti, erit angulus a b d obtusus, quare per huius arcus a d minor erit quadrante propter angulum a g d trianguli a g d acutum, & per eandem maior quadrante propter angulum a b d trianguli a b d obtusum. idem itaq; arcus minor erit quadrāte circumferentiæ eiusdem, & maior eo, quod est impossibile, arcus ergo perpendicularis huiusmodi non cadet extra triangulū. Prohibet autem hypothesis, ne arcus ille transeat per alterū punctorū b & g, sic enim angulus acutus aut obtusus haberet rectus, quod est impossibile. Destructis autem incōuenientibus illis relinquitur q̄ non nisi intra triangulū permaneat, quod pollicebatur prima pars theorematis.



Sit demū alter prædictorū angulorū, uerbi gratia, b obtusus, & reliquus g acutus. Dico q̄ perpendicularis cadet extra triangulū. Non enim potest coincidere alteri duorū laterū a b & a g, sic enim angulus obtusus aut acutus esset rectus, sed neq; intra triangulum consistere poterit. Si enim ita putaueris, sit arcus a e perpendicularis ad arcum b g, cui secundum punctū e communi cat. erit itaq; latus a e commune duobus triangulis a b e & a g e rectangulis, quorū unus angulū a b e habet obtusum, reliquus autem angulū a g e acutū, quare per huius bis assumptā arcus a e maior erit quarta circumferentiæ, & minor ea, quod est inconueniens. Cum igitur arcus perpendicularis huiusmodi non possit coincidere alteri duorum laterū a b & a g, neq; intra triangulū cadere, reliquū est necessario ut extra triangulum reperiatur, quæ cupiebas addiscere.

IX.

Cuiuslibet trianguli tres angulos acutos habentis, trium laterum unumquodq; minus quadrante pronunciabitur.

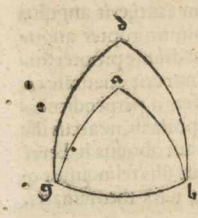


Trianguli a b g tres anguli sint acuti. Dico q̄ unū quodq; latus eius quadrante minus erit. Fiant enim apud duo puncta b & g duo anguli recti, eductis duobus arcubus circulorū magnorū b e & g e in puncto e cōcurrentibus, quem per huius oportet esse polum circuli b g. à polo igitur e per punctū a procedat circulus magnus, qui necessariò secabit arcum b g, si enim non secaret, necessario alterū duorū arcuū a b & a g, fieret q̄ pars quadrantis semicircumferentia, quod est inconueniens, secet igitur in puncto d, erit autem uterq; angulorū apud d rectus per huius, & ideo uterq; trianguloru a b d & a g d rectangulus. cumq; duo anguli a b d & b a d sint acuti, totum enim b a g acutum tradidit hypothesis, erit per huius arcus a b minor quadrante. similiter probabimus arcū a g minorem quadrante, restat igitur, ut arcum b g quadrante breuiorem ostendamus, quod quidem habebitur, si apud duo puncta a & b duos rectos, quemadmodū nuperrime apud duo puncta b & g constituerimus. & hoc erat peragendum.

X.

Si quis triangulus duos acutos habeat angulos æquales, utrunq; laterum eos respicientiū minus quadrante prædicabitur.

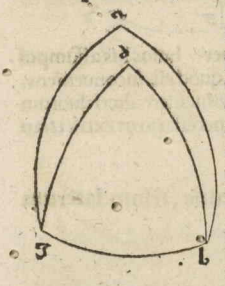
Sit triangulus a b g, duos angulos b & g acutos habens æquales. Dico q̄



utrunq; laterũ eius, a b & a g minus erit quarta circuli. Creabimus enim apud duo pũcta b & g duos rectos angulos: arcui b g insessuros eductis duobus arcubus b d & g d in puncto d confluentibus, quem huius non sinit esse polum circuli b g, & ideo per huius uterq; arcuum b d & g d quadrans habebitur. Cũ itaq; duo arcus b a & g a, ex punctis terminalibus lateris b g trianguli d b g egressi intra triangulum d b g concurrãt, erunt per tertij huius duo arcus b a & a g coniuncti breuiores duobus arcubus b d & d g. Vnde & medietas horũ arcus uidelicet b a breuior erit medietate istorũ quadrante scilicet b d. similiter arcũ g a minorẽ esse cõstabit ipso quadrãte g d. oportet em̃ duos arcus b a & a g æquales esse, tertij huius enunciante, quod libuit attingere.

XI.

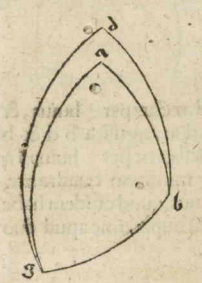
Trianguli duos obtusos habentis angulos æquales utrunq; laterũ eos respicientiũ, maius quadrante reperietur.



Sint duo anguli b & g, trianguli a b g obtusi æquales. Dico q; utrunq; laterum a b & a g quadrantem superabit. Factis em̃ duobus rectis angulis apud duo puncta b & g, arcus b g, educendo duos arcus b d & g d, quos constat intra triangulum a b g concurrere, quod fiat in puncto d, erunt quẽadmodum in præmissa argumẽtabar duo arcus b d & b g, quos oportet esse quadrãtes, minores duobus arcubus b a & a g lateribus trianguli nostri, & ideo sicut duo arcus b a, a g æquales, ppter angulos a b g & a g b æquales, superabũt duos quadrantes b d & d g, ita uterq; arcuum b a & a g quadrante maior intelligẽs, quod uoluimus exponere.

XII.

Si quis triangũlus inæquales habeat duos angulos acutos, latus minori eorum oppositum minus erit quadrante.



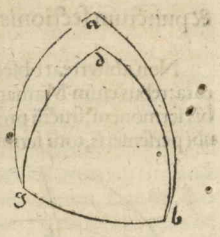
Triãguli a b g duo anguli b & g sint acuti, sitq; angulus g minor angulo b. Dico q; latus a b est minus quadrante. Nã constituendo duos rectos apud duo puncta b & g, productis arcubus b d & g d in puncto d concurrentibus, erũt duo arcus b a & a g minores duobus b d & d g, qui semicircũferentiam perficiunt, quoniam uterq; eorum est quadrans circumferentiæ, d polo circuli b g existente. duo igitur arcus b a & a g minores sunt semicircumferentia. cũq; arcus b a minor sit arcu a g per tertij huius, q; angulus g minor existat angulo b, erit arcus b a minor quadrante circumferentiæ, quod erat demonstrandum.

XIII.

Trianguli duos obtusos habentis angulos inæquales, latus maiori eorũ oppositũ maius quadrante pronunciabitur.

Habeat

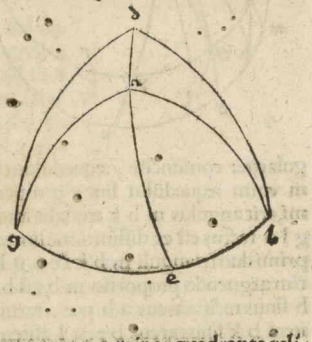
Habeat triangulus a b g duos angulos b & g obtusos inæquales, g scilicet maiorem angulo b. Dico q latus a b maius est quadrante. A punctis enim b & g arcus erecti orthogonaliter concurrent intra triangulū a b g, ꝙd fit in puncto d polo scilicet circuli b g, erunt q duo arcus b a & a g maiores duobus arcubus b d, d g, qui æquantur semicircumferentiæ, quare duo arcus b a, a g semicircumferentiam superabunt, unde & maior eorum scilicet arcus a b quadrante maior habebitur, quod erat absoluendum.



XIIII.

Si quis triangulus duos acutos habuerit angulos, latusq; uni eorū oppositum non minus quadrante, erit reliquus eius angulus obtusus, latusq; ei oppositum maius quadrante.

Sit triangulus a b g duos angulos b & g acutos habens, cuius latus a b alterū acutoꝝ respiciens, non sit minus quadrāte. Dico q angulus eius a erit obtusus, & latus b g maius quadrāte. Fiāt em apud duo puncta b & g duo anguli recti, eductis duobus arcubus in puncto d extra triangulū a b g concurrentibus, quem quidem oportet esse polum circuli b g, demittaturq; à polo d p punctū a quadrans d a e, incidens arcui b g in puncto e. Cum igitur arcus a g non sit minor quadrante, erit ipse aut quadrans, aut maior eo. Si quadrans, per huius alterum duoꝝ laterū a e, e b trianguli rectanguli a e b erit quarta circumferentiæ. est autem arcus a e minor quadrante, reliquus ergo e b quadrans erit necessario, quare totus arcus b g maior erit quadrāte. Similiter per huius probabimus angulū b a e esse rectū, cum angulus a b e sit acutus ex hypothesi, totus igitur angulus b a g maior est recto. Qd si latus a b maius fuerit quadrante, erit per huius arcus b e maior quadrante, cum reliquus a e sit minor quadrante, arcus ergo b g multo maior erit quadrāte. Similiter per huius oportebit angulū b a e esse obtusum, cum angulus a b e sit acutus per hypothesim, angulus ergo b a g multo magis erit obtusus, patet igitur propositio.

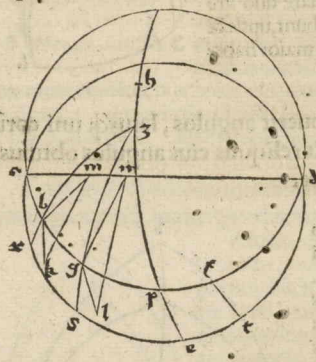


XV.

Si fuerint in sphæra duo circuli magni ad se inclinati, signenturq; in circumferentia unius eorum duo puncta, aut in utriusq; circumferentia punctus unus, & producatur ex unoquoq; punctorum ad circūferentiam circuli alterius perpendicularis arcus, proportio sinus arcus qui est inter unum illorum punctorum, & punctum sectionis circulorum ad sinum arcus perpendicularis ex eo protracti ad circulum alterum est, ut proportio sinus arcus comprehensi inter punctum alium

& punctum ſectionis ad ſinum arcus producti ex illo puncto.

Non abſterreat obſecro te uerboſa præſens propoſitio, & primo aſpectu intri cata: rebus enim Mathematicis uix ſatis lucidum, ne dixerim uenuſtũ, accomoda bis ſermonem: fructũ profecto dulciſſimũ hac arbore cuius rigida decerpes, quem ubi perſenſeris, totũ ferme præſentẽ librum intelliges. Sint igit duo circuli magni

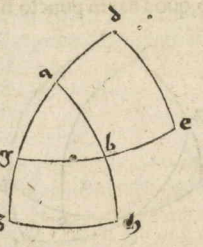


in ſphæra ad ſe inuicem inclinati a b g d & a e d, quoꝝ circumferentiæ ſecent ſe in punctis a & d, ſignentq; duo puncta b g in circumferentia circuli a b g d, à quibus deſcendant duo arcus ꝓpendiculares b r, g s ad circumferentiam circuli a e d. Dico q; proportio ſinus arcus a b ad ſinum arcus b r eſt ut ſinus arcus a g ad ſinum arcus g s. A punctis enim b & g binæ perpendiculares rectæ demittãtur, unæ quidem ad ſectiõem communem circuloꝝ ſcilicet lineam a d, quæ ſint b m, g n, alteræ uero ad ſuperficiem circuli a e d, quæ ſint b k & g l ductis lineis k m & l n quoniam itaq; duæ lineæ m b, b k angulariter coniunctæ, æquediſtant duabus n g, g l angulariter coniunctis, b m enim æquediſtat lineæ g n per primi, b k autem ipſi g l per undecimi, erit angulus m b k æqualis angulo n g l, uterq; autem angulo; b k m & g l n rectus eſt ex diffinitione lineæ perpendicularis ad ſuperficiem, quare per 32 primi duo trianguli m b k & n g l ſunt æquianguli, & ideo per 4. ſexti permutatim arguendo proportio m b ad b k eſt, ut proportio n g ad g l. eſt autem m b ſinus rectus arcus a b per tertij & diffinitionem, n g uero ſinus arcus a g, item b k ſinus arcus b r, g l autem ſinus arcus g s. proportio igitur ſinus arcus a b ad ſinum arcus b r eſt ut ſinus arcus a g ad ſinum arcus g s. Habemus ergo partem propoſitionis ueram, quando duo puncta in una circũferentia ſignantur. Signemus ea demum in duabus circumferentijs dictorũ circuloꝝ, ſitq; unus b in circumferentia circuli a b g d, reliquus autem t in circumferentia circuli a e d, deſcendat à puncto t perpendicularis arcus t x ad circumferentiam circuli a b g d. Dico q; proportio ſinus arcus a b ad ſinum arcus b r eſt, ut proportio ſinus arcus d t ad ſinũ arcus t x. Sint enim poli duorũ circuloꝝ h & 3, per quos tranſeat circulus magnus h 3 p e ſecans circumferentias dictorũ circuloꝝ in pũctis p & e. In circumferentia itaq; circuli a b g d ſignata ſunt duo puncta b & p, à quibus deſcendunt duo ꝓpendiculares b r & p e, quare ꝓportio ſinus arcus a b ad ſinum arcus b r eſt ut ſinus arcus a p ad ſinum arcus p e. Rurſus cum in circumferentia circuli a e d ſignata ſint duo puncta e & t, à quibus duo perpendiculares oriuntur e p & t x, erit proportio ſinus arcus d t ad ſinum arcus t x, ſicut ſinus arcus d e ad ſinum arcus e p. eſt autem proportio ſinus arcus d e ad ſinum arcus e p, ſicut ſinus arcus a p ad ſinum eiuſdem arcus p e, uterq; enim arcuũ a p & d e eſt quarta circumferentiæ unius. proportio igitur ſinus arcus a b ad ſinum arcus b r eſt ut ſinus arcus d e ad ſinũ arcus t x, quæ fuere peragenda. Sed forſitan adhuc animus pendet, attento q; à quolibet puncto in ſuperficie ſphærica præ-

rica præter polum circuli cuiuslibet, extra tamen circumferentiam eius signato, geminos demittere liceat arcus perpendiculares ad circumferentiam ipsius circuli. possibile est enim per punctum signatū & polum circuli transire circulū alium magnum tertij huius docente. circuli igitur hoc pacto descripti, duo arcus inter punctū signatum & circumferentiam circuli iacentis intercepti, perpendiculares erunt ex huius ad circumferentiam circuli iacentis. In figuratione itaq; præsenti à puncto b prodibit perpendicularis, unus ad partem inclinatiōis, reliquus autem ad partem oppositam. Idem quoq; accidet cæteris punctis in utraq; circumferentiarū signatis, uerum hoc non interturbabit syllogismū nostrum, nam hij duo perpendiculares cum sint æquales semicircumferentiæ per tertij huius, communis animi conceptio eundem ipsis communem donabit sinum. quicquid igitur de uno arcuū prædicabit theorema nostrum, & de reliquo demonstratū habebit.

XVI.

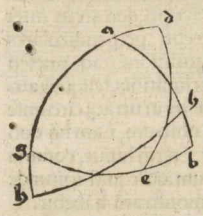
In omni triangulo rectangulo omnium laterum sinus ad sinus angulorum, quos subtendunt, eadem est proportio.

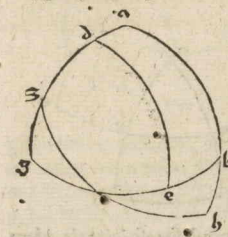


Sit triangulus a b g angulum b rectum habēs. Dico q; proportio sinus lateris a b ad sinum anguli a g b eadem est proportioni sinus lateris b g ad sinū anguli b a g, & proportioni, quam habet sinus lateris a g ad sinum anguli a b g, quod sic demonstrabimus. Necesse est, aut utrunq; angulorū a & g esse rectum, aut alterū eorū duntaxat, aut nullum. Si uterq; eorum rectus est, erit per hypothesim & huius pūctus a polus circuli b g, b autem polus circuli a g & g polus circuli a b, quare per diffinitionem unusquisq; trium arcuū dictorū determinabit quantitatem anguli se respicientis. idem igitur erit sinus cuiuslibet triū laterū & anguli sibi oppositi, & ideo sinus omniū laterū ad sinus angulorū se respicientiū, proportionem eandem accipiunt uidelicet æqualitatis. Si autem alter duntaxat angulorū a & g fuerit rectus, sit ille, uerbi gratia, angulus g, tradidit autem & hypothesis angulū b rectum, quare per huius a est polus circuli b g, & per huius uterq; arcuū b a, & a g quadrans circumferentiæ magnæ. per diffinitionem igitur unusquisq; arcuū a b, b g & g a quantitatem anguli se respicientis determinabit, eritq; idem sinus cuiuslibet lateris & anguli se respicientis conuertendo diffinitionem sinus anguli. unde postremo constabit omnium laterum sinus ad sinus angulorū se respicientiū, eandem habere proportionem scilicet æqualitatis. Qd si neuter angulorū a & g rectus offeratur, non poterit aliquis triū arcuū lateralium esse quadrans circumferentiæ, quemadmodū ex huius trahitur, uerum in triplici uarietate habebūtur. Si enim uterq; angulorū a & g fuerit acutus, erit per huius uterq; arcuū a b & b g minor quadrante, unde & per huius arcus a g minor quarta circumferentiæ. Crescat igitur arcus g a uersus a donec fiet quadrans a d, secundum cuius cordam quæ est costa quadrati magni super puncto g facto polo describatur circulus magnus, secans arcum g b prolongatū in puncto e. prolongetur demum arcus a g ad partem puncti g, donec quadrans habebitur a 3, cuius corda super polo a circumducta pariat circulū occurrentem arcui a b continuato in puncto h. Pinximus hoc pacto unam figurationem. Si uero uterq; angulorum a & g obtusum se

præbeat

præbeat, per media nuperrime commemorata utercꝫ arcuū a b & b g quadrantem superabit, arcus autem a g quadrante minorem confitebimur. prolongato igitur ut antea utrinꝫ arcu a g, donec & arcus g d quarta nascetur & arcus a 3, super polis g & a duo circuli magni describantur, quoꝝ unius super g scilicet, descripti circumferentia necessario secabit arcum g b maiorem quadrante, quod fiat in puncto e, reliqui uero super a descripti, secabunt arcū a b, quod contingat in puncto h. Sic altera surgit figuratio. Qđ si alter angulorꝫ a & g obtusus fuerit, reliquus autē acutus, sit a obtusus & g acutus, erit itaqꝫ ex p̄allegatis locis utercꝫ arcuū b g & g a quadrante maior, arcus autem a b minor eo. abscindant̄ ergo ex arcu a g duo quadrates g d & a 3 in arcu d 3 participantes, descriptoq; circulo ut prius super g polō, circumferentia eius secabit arcum b g maiorē quadrante, quod fiat in puncto e, circumferentiā autem circuli super a descripti, non secabit arcum a b, cum sit minor quadrante, sed occurret ei quantū sat est porrecto, quod fiat in puncto h. Neutro igitur angulorꝫ a & g recto existente, tametsi figuratiōe triplicem putamus, syllogismus tamē erit unicus. Cum enim duo circuli g d & g e ad se inclinati sint, & in circumferentia circuli g d signenť duo pūcta, ex quibus duo perpendiculares a b & d e descendunt, erit per præcedentem proportio sinus arcus g a ad sinū arcus a b sicut sinus arcus g d ad sinū arcus d e, & permutatim sinus g a ad sinū g d, sicut sinus a b ad sinū d e. Item duo circuli a 3 & a h ad se inclinati sunt, signanturꝫ duo puncta g & 3 in circumferentia circuli a 3, ex quibus descendunt duo arcus perpendiculares g b & 3 b, quare per præmissam, proportio sinus a g ad sinum g b est tanꝫ sinus a 3 ad sinum 3 h, & permutatim sinus a g ad sinum a 3 sicut sinus g b ad sinum 3 h. est autem sinus a g ad sinum a 3, sicut sinus g a ad sinū g d, quꝫ utercꝫ arcuū a 3 & g d quadrans habeatur. Sinus igitur lateris a b ad sinum d e, & sinus lateris b g ad sinum 3 h, eandem habent proportionē, quā uidelicet sinus lateris a g ad sinum quadrantis. Sinus autē d e est sinus anguli a g b, arcus enim d e determinat quantitatē anguli a g b, puncto g polo existente circuli d e. Similiter sinus 3 h est sinus anguli b a g. sinus autē quadrantis est sinus anguli recti. quare sinus lateris a b ad sinum anguli a g b, & sinus lateris b g ad sinum anguli b a g, sinus quoꝫ lateris a g ad sinum anguli recti a b g unam & eandem suscipiunt proportionem, quod erat declarandum.



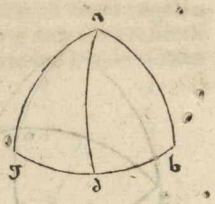


XVII.

In omni triangulo non rectangulo sinus laterum ad sinus angulorum eis oppositorū eandē habent proportionem.

Quam præcedens de triangulis rectangulis prædicabat passionem, præsens quoꝫ de triangulis non rectangulis enunciat. Sit igitur triangulus a b g, nullū habens rectum angulū. Dico qꝫ sinus lateris a b ad sinum anguli g, sinusꝫ lateris a b ad sinum anguli b, & sinus lateris b g ad sinum anguli unā & eandē proportionem accipiunt. Demittam enī ex puncto a perpendicularem a d incidentem

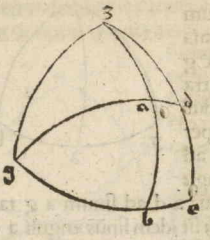
tem arcui b g si intra triangulū manserit, aut occurrentem arcui b g oportune prolongato si extra triangulum ceciderit, quæ neutri arcuum a b & a g sibi contermínalium coincidere poterit. sic em̄ alter angulorū b & g rectus haberetur, quē hypothesis nostra non rectum tradidit. Cadat itaq; prius intra triangulū, distinguens duos triangulos a b d & a g d rectangulos. erit ergo per præcedentē terminis permutatis proportio sinus a b ad sinum a d, sicut sinus anguli a d b recti ad sinum anguli a b d. sed & per eandem præmissam proportio sinus a d ad sinum a g tanq̄ sinus anguli a g d ad sinum anguli a d g recti. cūq; sit idem sinus anguli a d g & anguli a d b, q̄ uterq; eorū rectus est. erit per æquā proportionalitatē indirectā sinus a b ad sinum a g ueluti sinus anguli a g b ad sinum anguli a b g, & permutatim sinus lateris a b ad sinum anguli a g b tanq̄ sinus lateris a g ad sinū anguli a b g. Eandem denicq; concludes proportionē sinus lateris b g ad sinum anguli b a g, si prius ab altero punctorū angularium b & g ad latus sibi oppositum demiseris arcum perpendicularē. Quod si perpendicularis a d extra triangulum ceciderit mutata parumper figuratione præmissum repetemus syllogismū. Erit em̄ ex præmissa permutatim arguendo sinus a b ad sinum a d tanq̄ sinus anguli a d b ad sinum anguli a b d recti. itemq; sinus a d ad sinum a g, sicut sinus anguli a g b ad sinum anguli a d g recti. quare per æquam indirectam erit sinus lateris a b ad sinum lateris a g, sicut sinus anguli a g b ad sinum anguli a b d. sinus autem anguli a b d est etiam sinus anguli a b g per communem scientiam. sinus igitur a b ad sinum a g est ut sinus anguli a g b ad sinum anguli a g b, & ideo permutatis terminis, erit sinus lateris a b ad sinum anguli a g b, tanq̄ sinus lateris a g ad sinū anguli a b g. Hanc demū conuincemus esse proportionem sinus lateris b g ad sinum anguli b a g, quemadmodū hactenus processimus. Passionem igitur quæ de triangulis rectangulis & non rectangulis singulatim in hisce demonstrabatur theorematibus, communiter tandem de omnibus triangulis qualescunq; fuerint concludere licebit, quæ res quantos & q̄ iucundos allatura sit fructus pedetentim intuebimur.



XVIII.

In omni triangulo unicum habente rectum angulum, proportio sinus anguli nō recti ad sinum anguli recti est, ut sinus complementi anguli reliqui ad sinum complementi lateris eum subtendentis.

Sit triangulus a b g, cuius angulus b quidem sit rectus, neuter autem duorū a & g rectus habeatur. Dico q̄ proportio sinus anguli b a g ad sinum anguli b recti est, ut sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b, similiter sinus anguli a g b ad sinum anguli b recti se habet, tanq̄ sinus complementi anguli b a g ad sinum complementi arcus b g, quod sic demōstrabimus. Quoniam neuter angulorum a & g est rectus, erit aut uterq; eorum acutus uel obtusus, aut alter acutus, & reliquus obtusus. Sit primo uterq; acutus, quamobrē per huius utrunq; laterū a b & b g minus erit quadrante, ideoq; per huius

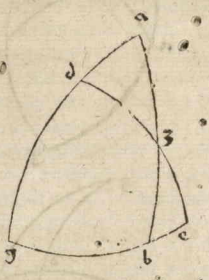


& arcus a g minor existet quadrante, protendat ergo g a ad partem puncti a, donec fiet quadrans g d, secundum cuius cordā super g facto polo circumducatur circulus secans arcum g b satis prolongatum in puncto e. arcus denique b a ad partē puncti a porrectus coincidat circumferentiæ circuli super g polo circumducti in pūcto 3, quē ex huius constabit esse polum circuli g b e. per autem huius uterq; arcuū 3 b & 3 e quadrans habebitur, & angulus 3 e g rectus. quare per diffinitionem arcus a 3 erit complementum lateris a b, arcus autem d 3 cōplementum arcus d e. cūq; arcus d e determinet quantitatem anguli a g b, puncto g polo existētē circuli 3 d e, determinabit arcus 3 d quantitatem cōplementi anguli a g b, quod facilius ducto arcu g 3 cōsiteberis. Est autem proportio sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti per huius conuersim arguendo, sicut proportio sinus b g ad sinū g a. sinus demum b g ad sinum g a, sicut sinus d 3 ad sinum 3 a per huius. quoniam in circumferentijs duoꝝ circuloꝝ g a d & 3 a b signata sunt duo pūcta g & 3, à quibus alternatim descendūt duo arcus perpendiculares ad circumferentias huiusmodi circuloꝝ, g b quidē propter angulum a b g rectum ex hypothesi, 3 d autē propter angulum 3 d g rectum, g polo circuli 3 d existente. Sinus autē 3 d est sinus cōplementi anguli a g b, & arcus a 3 est complementum lateris a b. Proportio igitur sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti, est tanq; sinus cōplementi anguli a g b ad sinum complementi lateris eum subtendentis.

Quòd si fuerit uterq; angulorꝝ a & g obtusus per huius utrūq; latenꝝ a b & b g quadrantē superabit. unde & latus a g minus quarta enuncíabitur. Crescat igit arcus g a, donec arcus g d per a punctū incedens fiet quadrans, secundū cuius cordā describatur circulus magnus, secans necessario arcū g b, quod fiat in puncto e, secabit aūt circulus ille necessario arcum a b in puncto qui sit 3. per itaq; huius duo arcus g e & e 3 perpendiculariter sibi inuicem insistent, cūq; per hypothesim arcus a b perpendicularis sit ad arcum b g angulo b recto existente, erit per huius 3 polus circuli b g, & per corollarium eiusdē uterq; arcuum 3 b & 3 e quadrans circumferentiæ. quare per diffinitionem arcus a 3 erit complementum arcus a b, arcus etiam 3 d determinabit complemētum anguli a g b, quod apertum uidebitur si arcū g 3 produxerimus. erit enim angulus h g 3 rectus, arcu 3 b quadrante existente, sinus ergo arcus 3 d erit sinus complementi anguli a g b. Cum itaq; in circumferentijs duorum circulorū a g & a b ad se inclinatorum signauerimus duo puncta g & 3, à quibus descendunt duo perpendiculares, g b quidem ad arcum a b propter angulum b rectū ex hypothesi, 3 d autem ad arcum g d propter g polū circuli d 3, erit per huius conuersis terminis proportio sinus arcus b g ad sinum arcus g a, tāq; sinus d 3 ad sinum arcus 3 a, uidelicet tanq; sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b, sinus autem arcus b g ad sinum arcus g a se habet per

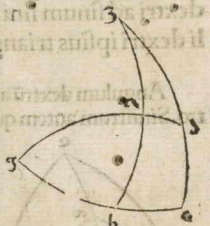
huius

huius permutato terminorum situ, tanq; sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti, & ideo sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti se habet, sicut sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b ipsum subtendentis. Postremo alter angulorũ a & g sit obtusus, uerbi gratia, angulus a, & reliquus g acutus, erit itaq; per media supradicta arcus a b minor quadrante, uterq; uero arcuum a g & g b quadrantem superabit. resecabo igitur ex arcu a g quadrantem g d, descriptoq; circulo secundum quantitatem g d super g polo, circumferentia eius necessario concurrens cũ arcu g b quadrantẽ superante secabit arcum a b, quod fiat in puncto 3, quẽ propter esse polũ circuli b g, per huius propter binos angulos apd b & e rectos. unde & ex corollario eiusdẽ uterq; arcuum 3 b & 3 e quadrans conuincetur. Cũq; arcus d e quantitatẽ anguli a g e determinet, arcu 3 e quadrante existente, arcus d 3 quantitatẽ cõplemẽti anguli a g b determinabit, quod haud incertum affirmabis, ubi arcũ g 3 produxeris. similiter a 3 erit cõplementũ lateris a g. In circũferentijs autẽ duorũ circulorũ a g & a b ad se inclinatorũ (eisdem enim characteribus nunc arcus nunc circulos suos more nostro repræsentamus) signata sunt duo puncta g & 3, à quibus alterni egrediuntur perpendiculares g b & 3 d, quod nõ nisi ex locis cõmemoratis ostendemus, & tandem syllogismo freti pristino concludemus sinum anguli b a g se habere ad sinum anguli a b g recti tanq; sinũ cõplementi anguli a g b ad sinum cõplementi arcus eum subtendentis, quod iuuat attigisse. Non aliter procedemus angulũ a g b uice anguli b a g assumentes, cæteris ut res ipsa postulat commutatis.



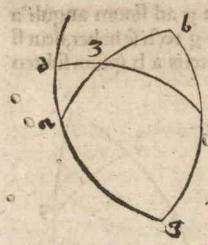
XIX.

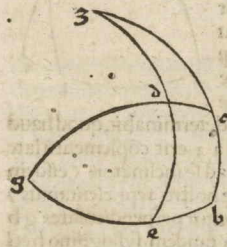
In omni triangulo, cui unicus est rectus angulus, sinus cõplementi lateris rectũ subtendentis angulũ ad sinũ cõplementi alterius rectum ambientiũ, eam habet proportionem, quã sinus complementi reliqui lateris ad sinum quadrantis.



Sit triangulus sphæralis a b g angulũ b rectũ habens, & utrumq; reliquorũ non rectum. Dico q̃ proportio sinus complementi lateris a g ad sinum complementi lateris a b, est ut sinus complementi lateris b g ad totum scilicet sinum quadrantis. itemq; sinus complementi eiusdem lateris a g ad sinum cõplementi lateris b g tanq; sinus cõplementi lateris a b ad sinum quadrãtis. Huius demonstrationem afferemus simplicẽ, tametsi tri uaria soleat esse figuratio. Si enim uterq; angulorũ a & g acutus fuerit, erit q̃ media in præmissis sæpenumero adducta, unũquodq; laterũ trianguli nostri minus quadrante. Prolongetur ergo latus g a ad partem puncti a, donec fiet arcus g d quarta circũferentiæ, secundum cuius cordã super g polo circulus descriptus secabit arcum g b satis continuatum, quod fiat in puncto e. secabit autem & arcũ b a prolongatũ, quod fiat in puncto 3. Si denicq; uterq; angulorũ a & g obtusum se præbeat, erit uterq; arcuũ a b & b g maior quadrante, arcus autem a g quadrante minor, quo crescente donec fiet quadrans ad, secundum cordã ipsius de-

scribatur circulus magnus secans necessario arcum g b quadrante maiorē in puncto qui sit e, arcū autē a g in puncto quem uocabimus 3. Et si postremo alter angulorum a & g obtusus fuerit, uerbi gratia angulus a, reliquus autem acutus, erit uterq; arcuum a g & g b quadrante maior ex allegatis locis, arcus autem a b minor quadrante. Abscindam igitur ex arcu g a quadrātem g d, secandū cuius cordā super polo g circulū magnū describo, qui secet arcū b g in puncto e, & arcū b a cōtinuatum in puncto 3. Quibus ita ordinatis constabit p



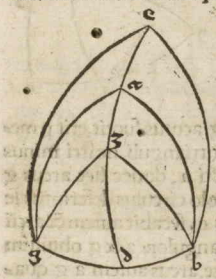


huius 3 esse polum circuli b g propter binos angulos apud b & e rectos, & per corollarium eiusdē utrūq; arcuum 3 b & 3 e esse quadrantem, quare per diffinitionem arcus a 3 est complementū lateris a b, arcus aūt a d complementū lateris a g, & arcus b e cōplementū lateris b g. Cumq; duo circuli 3 b & 3 e ad se inclinati sint, in quoꝝ uniūs scilicet 3 b circumferētia signantur duo puncta a & b, ex quibus perpendiculares arcus ad circumferentiam alterius descendunt, qui sunt a d & b e, propter binos angulos apud d & e rectos g polo circuli 3 e existente, erit per huius proportio sinus 3 a ad sinum a d, sicut sinus 3 b quadrantis ad sinum b e, & permutatim sinus 3 a complementi, scilicet arcus a b ad sinum quadrantis 3 b tanq; sinus a d complementi lateris a g rectum subtendentis angulū ad sinū b e complemēti scilicet lateris b g rectū ambiētis, quod pponebat cōfirmandū.

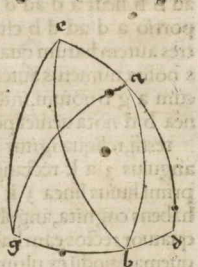
XX.

In omni triangulo non rectangulo perpendicularis à uertice anguli cuiuslibet ad latus sibi oppositū demissus cū duobus lateribus sibi conterminalibus duos complectetur angulos, eritq; proportio sinus dextri ad sinum sinistri eorum angulorū tanq; sinus cōplementi anguli dextri ipsius trianguli ad sinū cōplementi anguli sinistri.

Angulum dextrū appellō, quem facit perpendicularis cū latere trianguli dextro. Sinistrum autem quē cum sinistro. Sit triangulus a b g, nullū habens rectū angulū, à cuius anguli uertice descendat arcus a d perpendicularis ad arcum b g, cōplectens cum duobus lateribus trianguli sibi cōterminalibus duos angulos, cum latere quidē a b dextro angulū b a d, cum latere autem sinistro a g angulū a g d. Dico q; proportio sinus anguli b a d ad sinū anguli g a d, est sicut pportio sinus cōplementi anguli a b g ad sinum cōplementi anguli a g b. Perpendicularis em arcus aut cadit intra triangulū, aut extra, cum neutri arcuum sibi conterminalū coincidere possit, sic nāq; alter angulorum b & g rectus fieret quē hypothesis non rectum tradidit, unde etiam palam q; perpendicularis cum duobus lateribus duos continebit angulos. Cadat primum intra, & sit minor quadrante, quod quidē accidit dū uterq; angu-



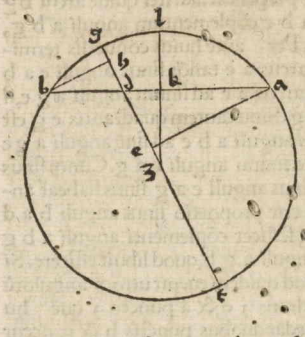
angulorum b & g acutus fuerit, quemadmodum ex huius trahitur, non potest autem esse quadrans angulo a b g non existente recto. Extendatur ergo d a usq; ad e donec arcus d e quadrans habeatur, eritq; per huius e polus circuli b g, à quo duobus punctis b & g occurrant duo arcus circuloꝝ magnoꝝ e b & e g, quos oportet esse quadrantes perpendiculariter quidē arcui b g insistentes. eritq; per diffinitionem angulus a b e cōplementum anguli a b g, & angulus a g e complementū anguli a g b. Per autē huius conuersis terminis est proportio sinus anguli a b e ad sinum arcus a e tanq; sinus anguli e a b ad sinum quadrantis e b. & per eandem sinus arcus a e ad sinum anguli a g e, sicut sinus quadrantis e g ad sinum anguli e a g. Sinus autem quadrantis e g est etiam sinus quadrantis e b, per æquā igitur sinus anguli a b e ad sinū anguli a g e proportionem habet, quā sinus anguli e a b ad sinum anguli e a g. Cunq; sinus anguli e a b sit etiā anguli b a d, q; similiter sinus anguli e a g sinus habeat anguli d a g, q; bini binis rectis æquipolleant, erit proportio sinus anguli b a d ad sinū anguli g a d, tanq; sinus anguli a b e, scilicet cōplementi anguli a b g ad sinum anguli a g e, scilicet complementi anguli a g b, quod libuit efficere. Si autem arcus a d quadrante maior extiterit, quod quidem euenit utroq; angulorū b & g obtuso existente, abscindatur ex eo quadrans 3 d, & à puncto 3 quē huius polū circuli b g demōstrat, duo arcus procedāt duobus punctis b & g occurrant, quos liquet esse quadrantes per huius orthogonaliter insidentes arcui b g, angulus igitur a b 3 est complementum anguli a b g per diffinitionem, itemq; angulus a g 3 complementum anguli a g b diffinietur. Est autem per huius conuersim arguendo proportio sinus anguli b a 3 siue b a d ad sinum quadrantis 3 b, ueluti sinus anguli a b 3 ad sinum arcus a 3. & per eandem sinus quadrātis 3 g ad sinum anguli g a 3 siue g a d, tāq; sinus arcus a 3 ad sinum anguli a g 3. per æquam igitur sinus anguli b a d ad sinum anguli g a d erit ut sinus anguli a b 3, scilicet complementi anguli a b g ad sinum anguli a g 3, scilicet cōplementi anguli a g b. Cadat demum perpendicularis extra triangulum, altero angulorum b & g obtuso existente, & reliquo acuto, quemadmodum ex huius trahitur. Obuiabit autem perpendicularis arcui g b prolongato ad partem anguli obtusi, qui uerbi gratia sit b, eritq; minor quadrante q; angulus a b d acutus habeatur. extēdamus igitur eū donec quadrans fiet ad punctum quidem h terminatus, quē oportet esse polum circuli b g huius arguente. ab eo itaq; polo duo arcus egrediantur h b & h g, qui erunt quadrantes orthogonaliter arcui b g incidentes p



huius, quo fit ut angulus a b h complementū anguli a b g habeatur, angulusq; a g h cōplementum anguli a g b. est autē per huius conuersis terminis proportio sinus anguli b a h ad sinum quadrantis h b, tanq; sinus anguli a b h ad sinum arcus a h. & per eandem sinus quadrantis h g ad sinum anguli h a g. ueluti sinus arcus a h ad sinum anguli a g h. per æquā igitur proportioni sinus anguli b a h ad sinum anguli h a g, æqualis est proportio sinus anguli a b h ad sinum anguli a g h. sinus autem anguli b a h est et sinus anguli b a d. itemq; sinus anguli g a h est sinus anguli g a d. quare proportio sinus anguli b a d ad sinum anguli g a d, tanq; sinus anguli a b h complementi uidelicet anguli a b g ad sinū anguli a g h cōplementi scilicet anguli a g b habebitur. Ratū igitur exegimus quod proponebatur.

XXI.

Si quis arcus notus minor ſemicircumferentia in duos diuidatur, quorum ſinus proportionem habeant datam, utercꝫ eorũ notus erit.



Sit arcus a g b datus minor ſemicircũferentia diuiſus in duos arcus a g & g b, ſitcꝫ proportio ſinus arcus a g ad ſinum arcus g b data. Dico ꝙ utercꝫ arcuũ partialium a g & g b datus habebitur. Subtendatur enim arcui a g b corda ſua a b, ducaturcꝫ per punctum g & centrum circuli 3 diameter circuli ſecans cordam a b in puncto d. ex punctis autem a & b arcum a b terminantibus ductæ rectæ deſcendant perpendiculares ad diametrum, quæ ſint a e & b h, quarum utrancꝫ conſtat eſſe ſinũ rectum arcus ſibi cõterminalis, a e quidem arcus a g, & b h arcus b g. educatur etiam ſemidiameter 3 l orthogonaliter ſecans cordam a b in puncto k. Si igitur proportio ſinuũ data fuerit proportio æqualitatis, erunt duo arcus a g & g b æquales per communẽ ſcientiam ſinibus ſuis æqualibus exiſtentibus. cuncꝫ totus arcus a g b ſit notus, erit & utercꝫ arcuũ a g & g b notus ex primi huius. Si uero proportio dictoꝝ ſinuũ nõ fuerit proportio æqualitatis, erit alter eoꝝ altero maior. ſit itacꝫ a e maior ſinu b h, unde & arcus a g maior erit arcu g b. cum autem proportio a e ad b h ſit nota, oportet eam in terminis notis reperiri per diffinitionem proportiõis datæ, & ideo per quintã primi huius in numeris notis, qui ſint r & s, r quidẽ maior, & s minor, ita ut ſit proportio ſinus a e ad ſinum b h ſicut r ad s. cum autẽ duo trianguli a e d & b h d rectanguli duos angulos apud contrapoſitos habeant æquales, erunt ipſi per 32. primi æquiangeli, & ideo per 4. ſexti proportio a e ad b h ſicut a d ad d b, pportio autem a e ad b h erat tancꝫ r ad s, quare & proportio a d ad d b eſt ueluti r ad s, & coniunctim a b ad b d ſicut r s ad s, tres autem harum quantitatũ notæ ſunt, r s quidem propter duos numeros r & s notos, numerus autem s exeis quæ ſupradicta ſunt, corda deniꝫ a b, ꝓpter arcum a g notum, intercedente tabula ſinuũ aut cordaꝝ, quare ita igitur ſcilicet linea b d nota ueniet per primi huius, eſt autem b k nota medietas cordæ a b, tertij, reliqua igitur d k nota erit. educta inſuper ſemidiametro 3 a, erit triangulus 3 a k rectangulus, cuius duo latera 3 a & a k nota ſunt, unde & per primi huius linea 3 k nota prodibit. triangulus itacꝫ 3 d k duo latera 3 k & k d habens cognita, angulũ d 3 k cognitum afferet per primi huius, qui quidem ad quatuor rectos eam habet proportionem, quã arcus g l ad totam circumferentiã, quemadmodũ ex ultima ſexti trahitur, arcus igitur g l notus habebitur, quem ſi arcui a l dimidio ſcilicet arcus a g b addideris, reſultabit arcus a g notus, ipſe demum ex eodem arcu dimidio, ſiue ex arcu b l ablatus relinquet arcum g b cognitum, utercꝫ igitur arcuũ partialium notus habebitur, quod pollicebatur noſtrũ theorema. Poſſumus autem & ea quæ demonſtrauimus applicare ad arcum ſemicircumferentia maiorem, ut ſi arcus a t b notus diuidatur in duos arcus a t & t b, quorum ſinus proportionem habeant notam, dum tamen utercꝫ arcuum partialium fuerit minor ſemicircumferentia, ſic enim neceſſe eſt diametrũ circuli per

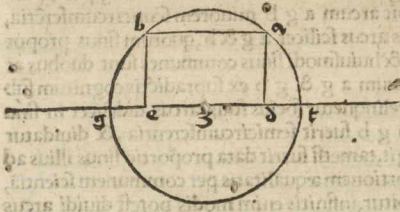
punctum

punctum t transeuntem, quæ sit t g secare cordam a b arcus a t b, quæ & arcui a g b communis, unde & secabit arcum a g b minorem semicircumferētia, & distinguet ex eo duos particulares arcus scilicet a g & b, quorum sinus proportionem habebunt datam, quoniam & huiusmodi sinus communes sunt duobus arcubus a t & t b, utrunq; igitur arcuum a g & g b ex supradictis cognitum tib trahemus à semicircumferentia, & relinquetur socius suus, arcus uidelicet in sinu secum participans. Quòd si arcus a g b fuerit semicircumferentia, & diuidatur in duos arcus a g & g b ut cōtingit, tametsi fuerit data proportio sinus illius ad sinum istius, quā oportet esse proportionem æqualitatis per communem scientiā, non tamen alter eorū necessario dabitur, infinitis enim modis potest diuidi arcus ille, qui est semicircumferentia proportione sinuum, quos habent arcus particulares, nō mutata. ☞ Operationē hoc pacto perficies. Si proportio sinuum data fuerit æqualitatis, arcum datū dimidiabis, & habebis duos particulares arcus cognitos. Si uero fuerit inæqualitatis, duos terminos eius congregabis, collectumq; pro primo statuas numero, minorem autem terminū proportionis datæ pro secundo, & numerum cordæ arcus dati pro tertio. multiplica igitur secundū per tertiū, & productum diuide per primum, quodq; exibit à dimidia corda arcus dati auferas, & residuum custodias, deinde semidiametro circuli in se multiplicata, auser quadratum dimidiæ cordæ arcus dati, quod autem relinquetur quadrato eius, quod custodiri præcepimus, coniunge, & collecti radicem elicq; quadratam, custoditū denicq; per sinū totum extende, & producti in radicem elicitam distribuas, exibit enim sinus differentiæ, quæ est inter dimidiū arcum datum, & utrunq; arcuū quæsitoris quā ex tabula sinus inuentā minue ex dimidio arcu dato, & relinquetur arcus minor quæsitus, aut eidem adde, ut resultet arcus maior. In exemplo. Ponatur arcus 40. graduum, & proportio sinus arcus a g maioris ad sinum arcus g b minoris, sicut 7. ad 4. colligo 7. & 4. fiunt 11. pro primo numero: 4 autem accipiam pro secundo, & 41042. scilicet cordam arcus dati pro tertio. multiplico 41042. per 4. producuntur 164168. quæ diuido per 11. exeunt 14924. linea uidelicet d b, quā subtrahe à medietate cordæ manenti, 5997. custodienda pro linea d k. Item semidiameter siue sinus totus 60000. quæ duco in se, producuntur 3600000000. à quo aufero quartū dimidiæ cordæ, quod est 421111441, manebunt 3178888559. hoc addo quadrato lineæ d k scilicet 3426409. resultāt 3210214968. huius radix quadrata ferè est 56659. quam seruo, deinde multiplico numerum lineæ d k per sinum totum, produeuntur 3358200000. quæ diuido per radicem seruatam. exeunt 5927. huius arcus 5 .40. ferè, quem deme ex dimidio arcu dato scilicet 20. manēt 14. 20. arcus scilicet g b. item eidem ipsum addo, ueniunt 25. 40. & totus ferè habebitur arcus a g.

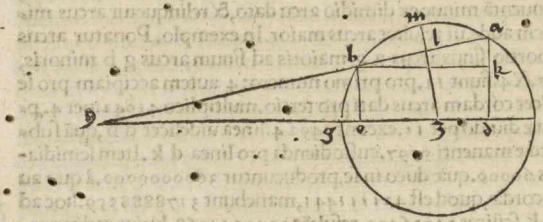
XXII.

Si data fuerit differentia duorum arcuum cum proportione sinuū suorum, utercq; eorum cognitus habebitur.

Duos arcus a g & g b cōterminales intelligantur, minorq; qui est g b pars maioris a g, quorum differentia sit data arcus uidelicet a b, eorumq; sinus habeant datā proportionem. Dico q utercq; eorum notus reddetur. Incedat enim per g terminum communem arcuū dictorū & centrum circuli 3 linea recta utrinq; indefinita, diametrum tamen circuli g t complectens, educaturq; semidiameter 3 m secans cordam a b orthogonaliter in puncto l, à punctis autem a & b cordā a b termi



b terminantibus duæ perpendiculares a d & b e ad diametrum descendant, quas constat esse duos sinus arcuũ a g & g b. Si itaq; ipsi fuerint æquales, hoc est, proportio sinuũ data fuerit proportio æqualitatis, erit per communem scientiã arcus g b æqualis arcui a t. dempto igitur a b noto per hypothesim ex semicircumferentia nota, residui medietas, arcus scilicet b g minor cognitus erit, cui si arcum a b notum adieceris, prodibit arcus a g maior cognitus. Si uero alter sinuum maior reliquo extiterit, sit uerbi gratia arcus maioris a g sinus, maior sinu arcus minoris b g, abscindatur ex sinu a d linea recta k d æqualis ipsi b e, ducta linea b k, quæ per primi æquedistabit lineæ e d, unde & per primi angulus e b k rectus habebitur angulo e d k recto existẽte & ideo angulus a b e rectum superabit. Producta autem linea ab a per b indefinita ex parte puncti b, erit reliquus angulus apud b acutus. cumq; sit angulus g b e g rectus, linea dicta a b satis porrecta concurret cũ linea t g oportune prolongata, quod fiat in puncto h. Quoniam igitur proportio a d ad b e data est, in numeris eã reperiemus per corollariũ quintæ primi huius, qui sint r & s, r quidẽ maior numero s. quorũ differentia sit x. Est autẽ per primi & quartam sexti proportio a d ad b e, & ideo r ad s tanq; a h ad h b, quare disiunctim a b ad b h sicut differentia numero r & s, uidelicet x ad ipsum



numerũ s. cumq; tres harum quantitatum proportionalium sint datæ, a b quidẽ cordam arcus sui notificat per tabulã sinuum aut cordarum, erit & linea b h nota, & ideo tota a h cognita ueniet. item b l medietas lineæ a b notæ non erit incognita, unde & linea h l data comparabitur. Quod igitur sub a h & h b continetur per primi huius notum erit, ipsum autem æquatur ei quod sub t h & h g per tertij, quamobrem quod sub t h & h g continetur notum erit, cui si quadratum semidiametri 3 g notæ adiecerimus, resultabit per sextã 2. quadratũ lineæ h 3 notum, unde & ipsa h 3 linea cognoscetur. Trianguli ergo 3 h l rectanguli duo latera 3 h & h l nota sunt, quare per primi huius, angulus eius h 3 l notus erit, cuius denicq; numerus arcum g m notum faciet, ad quem si arcũ m a, medietatem scilicet arcus a b dati adiunxeris, arcum a g notum habebis, itẽq; si ex eodem arcu g m dimidium arcum datum reieceris, arcus b g notus relinquetur, quod hactenus expectauimus. Quod si maior duorum sinuum minoris fuerit arcus, ut si quis offerat proportionem sinus arcus b t ad sinum arcus a t, cũ arcu a b noto, non aliter q; ut paulo prius peragendũ erit, donec elicietur arcus b g

cognitus

cognitus, quo dempto ex semicircumferentia, relinquetur arcus b t notus, cui si arcum a b ex hypothesi notum subtraxeris, arcum minorem a t notū relinques.

Operatio. Si data proportio sinuū fuerit æqualitatis, subtrahe arcū datum ex semicircumferentia, & residui dimidium erit arcus minor quæsitus, cui si arcū datum adieceris, resultabit arcus maior. Si uero fuerit proportio inæqualitatis, & minus maioris arcus maior sinu arcus minoris, differentiā terminorum proportiōis datæ constitue primum numerum, terminum autem minorē pro secundo, & cordam arcus dati, qui est differentia arcuum quæsitoris, pro tertio. Multiplica igitur secundum per tertium, & productum diuide per primū, & quod exibit addas cordæ dimidiæ arcus dati, collectumq; serua. Idem quoq; adde toti cordæ arcus dati, & collectum multiplica per id quod cordæ toti & eius medietati addidisti, eiq; q̄d producitur, quadratum semidiametri, scilicet sinus totius adijcias, huius demum aggregati radicem elice quadratā. Deinde quod supra seruatum iri iussimus, per sinum totum multiplica, & productum diuide ite radicem iam elicitam, ab exeuntisq; arcu dimidium arcū datum minue, & relinquetur arcus minor quæsitus, quē & eidem si addideris, maiorem arcum quæsitum numerabis. In exemplo. Ponat proportio sinus arcus a g, ad sinum arcus b g, sicut 20. ad 13. sitq; differentia arcuum 40. huius corda est 41042. differentia 20. 4. 13. est 7. Multiplico igit 41042. per 13. producuntur 533546. quæ diuido per 7. exeunt 76221. linea scilicet b h. huic addo medietatem cordæ a b, scilicet 20529. resultant 96742. linea scilicet l h. item colligo 76221. & 41042. ueniunt 117263. quæ multiplico per 76221. procreantur 8937903123. quibus addo quartum sinus totius, quod est 3600000000. colligunt 12537903123. huius radix quadrata est 111973. quā seruo, deinde multiplico 96742. p 60000. producunt 5804520000. q̄ diuido p 111973. exeūt 51839 sinus scilicet arcus m g, qui erit 59 45. à quo aufero 20. manebit arcus b g 39.46 item adde 20. ueniunt 79.46. & tantus computabitur arcus a g.

XXIII.

Si angulum notum in duos particulares secueris angulos, quorum sinus proportionem habeant datam, utercq; eorum notus erit.

Hæc ad angulos superficiales & planos rectilineos & sphærales accōmodabit. Sit angulus huiusmodi notus a 3 g diuisus in duos, a 3 b & b 3 g, sitq; proportio sinus anguli a 3 b ad sinum anguli b 3 g data. Dico q̄ utrumq; eorum cognoscet Geometra. Super uertice enim anguli, scilicet puncto 3 facto cētro, si planus & rectilineus fuerit, secundū quantālibet distantiam describatur circulus a b g, aut super puncto 3 facto polo secundum cordā quadrantis magni circulus a b g circumducatur, prolongenturq; tria latera angulos particulares complectentia, donec obuiabunt circumferentiæ descripti circuli in punctis a, b, & g. Vnusquisq; igitur trium arcuum, a g quidem totalis, & duorum partialiū a b & b g quantitatem anguli se respicientis determinat, unde & sinus illorum arcuum tāq; sinus angulorum suorū censebimus. Oportet autem arcum a g esse notum per 19 primi huius, sed & sinus duorum arcuum a b & b g, qui sunt etiam angulorum suorum, proportionem habebunt notam. quare per huius utercq; illorum arcuum notus erit, & ideo per corollarium primi huius utercq; angulorum a 3 b & b 3 g notus habebitur, quod erat deducendum. Operatio huius ab opere huius in nullo discrepat, nisi q̄ uice angulorum arcus se determinantes accipias.

XXIIII.

Data differentia duorum angulorum, & proportione sinuum suo-

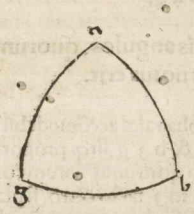
rum, utriusq; eorum quantitatem addiscemus.

Hanc ex huius non aliter q̄ præmissam ex emanare constat. nihil enim no ui admiscetur, quod non colligantia angulorum & arcuum se determinantium ad ministret. Quæ hactenus lucubrauimus, fuerę præambula arti triangulorū sphæ ralium, nunc rem ipsam ingrediamur. Habet autem triangulus sphæralis tria la tera & tres angulos, quorum tribus quibuscūq; cognitis, reliqua tria cognoscenda uia parata est. Demonstrabimus enim q̄ in omni triangulo sphærali ex arcubus circulorum magnorum constante, cui non sunt duo recti anguli, siue duo latera cū uno angulo, siue duos angulos cum uno latere, aut tria latera, aut tres angulos notos habuerimus, reliqua tria non latebunt. Cūq; non possint esse plures cōbinationes huiusmodi, omnem hoc pacto triangulorum sphæralium artē absoluemus, & quidem planissime, quæ res q̄ utilis quamq; iucunda ueniat Astronomo, non satis dici potest. Vt autem res ipsa cognita facilior existat, libuit intermiscere numeros exemplares, sæpe etenim obscuritatem propositionis, numerorū soluit accōmodatio. Huius operationem facile comparabis, si pro angulis uniuersis arcus se determinantes acceperis, quemadmodum in præcedenti.

XXV.

Omnis triangulus unicum habens rectum angulum, cum duobus lateribus cognitis, reliquum latus reliquosq; angulos latere non sinet.

Trianguli a b g angulum b rectum habentis, duo latera quæcūq; sint cognita. Dico q̄ reliquum eius latus notum erit cū reliquis duobus angulis. Erit enim proportio sinus complementi arcus a g, ad sinum complemēti a b, sicut sinus cōplementi b g ad sinum quadrantis. Ex quatuor itaq; quantitatibus proportionalibus tres notæ sunt propter duo latera nota per hypothesim cum quadrante notos. Vnde & per 19. primi huius quarta nota erit, uidelicet sinus complementi a g tertij lateris, quare ipsum complementum quod nunq; quadrāte maius existit cognitum habebitur, quod quidem demptum ex quadrāte, relinquet latus tertium notū, si ipsum quadrante minor extiterit, aut complementum illud additum quadranti, latus illud notum efficiet, si quadrantē superauerit. Vtrum autem minus quadrante aut maius fuerit, docebunt quantitates laterum datorum, huius dirigente. Tria igitur trianguli latera sunt cognita, cūq; sinus singulorū ad sinus angulorum sibi oppositorum proportionē habeant notam, eam uidelicet quā habet sinus a g ad sinum anguli a b g recti, quemadmodū enunciauit huius, erunt & sinus reliquorū angulorū noti, anguli aūt ipsi quales sint, uolo dicere. maiores recto an minores duorū laterū se respicientiū quātitates edocebūt, huius intercedēte, quare & oēs anguli noti erūt. Operatio. Si duo latera rectū ambientia fuerint data, multiplica sinū cōplementi alterius eorū per sinum complementi lateris reliqui, quodq; producetur in sinum totū, scilicet quadrantis partiare. exibit enim sinus complementi lateris rectum subtendentis, cuius arcū, scilicet ipsum complementum demes ex quadrante, si utrūq; datorum laterum aut maius quadrante fuerit aut minus eo, & relinquetur quātitas lateris rectū respicientis angulum. Si uero alterū ex datis lateribus quadrante maius, reliquū uero minus extiterit, complementum ipsum quadranti adijcias, & resultabit latus quæsitū. Quod si alterū datorum laterū recto opponat, multiplicabis sinū complementi



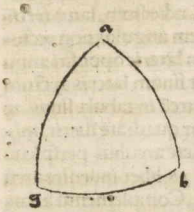
menti lateris rectum subtendentis per sinū quadrantis, producto enim diuiso per sinum reliqui lateris dati exibit sinus complementi lateris quæsiti, cuius arcū, scili cet complementum ipsum ex quadrante minuas, si utrumq; datorum laterū quadrante aut maius aut minus extiterit, si uero alterum eorum maius, & reliquū minus quadrante occurrat, complementum ipsum quadranti adiectum, latus tertiū manifestabit. Hæc pro latere tertio reperiendo. Duos autem angulos non rectos (rectus enim quilibet notus est) hoc pacto metieris. Sinum lateris oppositi anguli quæsito per sinum quadrantis extende, productumq; per sinum lateris rectum subtendētis partiaris, exibit em̄ sinus anguli quæsiti, cuius arcū in tabula sinus accipias; maiorē quidem si arcus ipsum respicies angulū maior quadrāte fuerit, minorem uero si minor. omnem quippe sinum duobus respōdere arcubus perspicuū est. In exemplo. Offeratur arcus a b 20. graduum, & b g 36. libet inuenire arcū a g. Complemētum arcus a b est 70. cuius sinus est 56382. Complementū arcus b g est 54. cuius sinus est 48541, dū sinus totus, scilicet quadrantis est 60000. quē admodū in tabula nostra constituimus. Multiplico igitur 56382. per 48543. producuntur 2736838662. quæ diuido per sinum totum 60000. exeunt 45614. sinus scilicet complementi arcus a g, huius arcus est 49. 29. complementum scilicet arcus a g, quod minuo ex 90. relinquuntur 40. 31. & tantus erit arcus a g. Sed ponatur latus a b 160. & latus b g 144. sinus complementorū sunt, quibus nunc usi sumus, ueniet q; latus a g quantum antehac elicitum est, oportet enim arcum a g minorem esse quadrante. Quod si latus a b fuerit 20. & b g 144. licet sinus priores redeant & complementum arcus a g idem quod prius, ipsum tamen nunc addendum est quadranti, ut habeatur arcus a g, q; alter arcuum a b & b g minor quadrante sit re, & reliquus maior eo. Sit demum latus a b 20. graduū, a g autē 50. complementū a b est 70. cuius sinus 56382. complementū a g 40. cuius sinus 38567. multiplico 38567. per 60000. producuntur 2314020000. quæ diuido per 56382. exeunt 41042. (quod enim propinquū est fiero, ueritatis utimur uice) hic est sinus cōplemēti arcus b g, cuius arcus 43. 10. ferè, quē demo ex 90. relinquunt 46. 50. pro arcu b g. tantus deniq; haberetur arcus b g, si arcus a b fuisset 160. & arcus a g 130. quoniā utrobiq; arcū b g minorem quadrātē oporteret esse. Si uero arcus a b fuerit 20. & arcus a g 130. erit arcus b g maior quadrante, repetito q; opere pristino, quoniam eidem erunt numeri, ueniet complementū arcus b g itērum 43. 10. addendum quidem quadranti, quo facto congregabuntur 133. 10. tantus q; numerabitur arcus a g quæsitus. Hæc de lateribus. Postremō libeat inuenire angulum a g b arcu a b existente 20. & b g 50. Sinus 20. graduum est 20521. Sinus 50. est 45963. Multiplico 20521. per sinum totum, producuntur 1231260000. quæ diuido per 45963. exeunt 26788. sinus uidelicet anguli a g b, cuius arcus minor est 26. 31. determinans quantitatem anguli a g b, quoniā arcus a b minor est quadrāte. & tantus censebitur etiā angulus a g b. Si aūt arcus a b superaret, angulus a g b recto maior haberetur. Vnde accipiendus esset arcus maior respondens sinui prædicto, qui est 153. 29. & tantum pronunciaremus angulum a g b. Non aliter ad notitiam anguli b a g perducemur.

XXVI.

Tribus angulis trianguli rectanguli cognitis, omnia eius latera patefient.

Sit triangulus a b g cuius tres anguli noti habeantur. Dico q; omnia eius latera fient cognita. Aut enim duo eorum sunt recti, aut unus tantū. Si duo, sint ipsi

uerbi gratia, b & g, erit igitur per huius punctus a polus circuli b g, & per huius uterq; arcuum a b & a g quadrans cognitus, sed & arcus b g determinat quantitatem anguli b a g noti, unde & ipse notus habetur. Tria itaq; trianguli latera nota reddidimus. Si uero unus duntaxat angulus, uerbi gratia, b sit rectus,



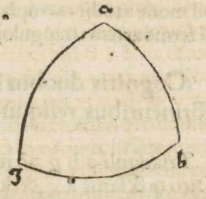
huius consulemus. erit enim proportio sinus anguli b a g ad sinum anguli a b g recti, tanq; sinus complementi anguli a g b ad sinum complementi lateris a b, tres autem horum sinuum notos faciunt anguli per hypothesim dati, quare & sinus complementi arcus a b cognitus uenient, cuius arcus, uidelicet ipsum complementum ex quarta circumferentiæ demptus relinquet arcum a b notum si arcus a b minor quadrante extiterit, aut additus quadranti ipsum arcum a b notum constituet, si arcus a b quadrantem superauerit. Arcus autem a b qualis fuerit respectu quadrantis, angulus a g b huius dirigente indicabit. Similiter per omnia notum reddemus latus b g, & tandem per præcedentem latus tertium a g innotescet. Verum inuento arcu a b hac uia ingredi licebit. Proportio sinus anguli a g b per huius ad sinum arcus a b est ut sinus anguli b a g ad sinum lateris b g. Tres autem huiusmodi sinus noti sunt, quare & quartus, & ideo arcus b g cognitus habebitur. similiter reperiemus arcum a g mediante angulo a b g recto. Cautum profecto te uelim esse in accipiendis arcubus per sinus datos, ne centies idem repetendo membrana cõtaminetur. unumquemq; enim sinum minorem sinu toto duobus respondere arcubus sæpenumero dictum est, quorum alter quadrante maior, alter eo minor existit. Volenti ergo sinui dato arcum suum reddere, cõsiderandum est, sit ne arcus suus maior quadrante aut minor eo, quod nimirum superiores conclusiones satis apertum tradidere. Idem præterea de cõplementis arcuum & angulorum obseruandum est, quemadmodum enim unumquodq; cõplementum arcuale duobus seruit arcubus, quorum alter quadrante maior, alter autem eo minor est, ita & omne cõplementum angulare duos respicit angulos, horum quidem maiorem, illum autem recto minorem. Si igitur cõplemento arcuali reddere conaris arcum suum, prius exploratum habeas, sit ne arcus ille maior quadrante aut minor eo. si maior, cõplementum suum additum quadranti arcum constituet quæsitum. si uero minor, cõplementum ex quadrante reiectum arcus quæsiti relinquet quantitatem. Non aliter circa angulos procedemus, nisi quod pridem arcus erat, nunc angulum intelligamus. ¶ Operatio huius. Si trianguli habuerit duos rectos, iam conclamatum est, utrumq; enim laterum eos subtendentium erit quadrans notus. tertium autem latus eum, quem angulus se respiciens sortitur numerum. Si uero unus duntaxat rectus fuerit, multiplica sinum complementi anguli non recti, quem subtendit latus quæsitum per sinum totum, & productum diuide per sinum reliqui anguli non recti, exibit enim sinus complementi arcus quæsiti, cum quo, ut supra monuimus, operabere. Ad reliqua demum cognoscenda latera, multiplicabis sinum arcus iam inuenti per sinum anguli respicientis aliud latus quæsitum, siue rectus siue non rectus extiterit, & productum partieris per sinum anguli quem subtendit latus nuper inuentum, exibit enim sinus lateris quæsiti, cui quo ut antea præcepimus, latus ipsum elicies. In exemplo. Sit uterq; angulorum b & g, 90. graduum, & angulus a 40, erit uterq; arcuum a b & b g 90 graduum, & arcus b g 40. Sed ponatur angulus b rectus, angulus uero a 50 gr. & angulus g 70. uolo inuenire arcum b g, sinus 50 gr. est 45963. Sinus complementi 70. gr. est 20521. quem duco in sinum totum, producuntur 1231260000. hæc diuido

per

per 45963. exeunt 26788. sinus scilicet complementi arcus a b, cuius arcus scilicet ipsum complementum est 26. 31. quem demo ex quadrante, ꝙ arcum a b minorem esse quadrante oporteat angulo g acuto existente, & relinquuntur 63. 29. tantusq; computabitur arcus b g. Rursus pro latere b g metiendo, sinus anguli g, qui ponebatur 70 est 56382. sinus lateris b g, quod iam nunc reperimus 63. 29. est 53688. quem multiplico per sinū anguli a, qui erat 45963, producuntur 2467661544. quæ diuido per 56382. exeunt 43767. sinus scilicet lateris b g, cuius arcus minor est 46. 50. & tantus est arcus b g, quoniam angulus b a g ponebatur acutus. Similiter reperiemus arcum a g, nihil prorsus uariando, nisi ꝙ loco anguli b a g angulum a b g rectum constituamus.

XXVII.

Vno latere trianguli rectanguli cum altero duorum non rectorum cognito, & angulum reliquū cum lateribus reliquis inuenire.



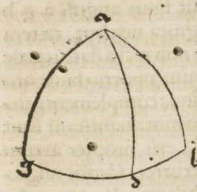
Sit triangulus a b g, angulum b rectum habēs, duosq; a & g non rectos, quorum alter, uerbi gratia, g sit datus cum uno latere quocunq;. Dico ꝙ angulus a cognitus erit, & reliqua duo latera. Si enim latus datum angulo dato opponatur, ut in figura est latus a b huius consulemus, erit enim conuersis terminis proportio sinus anguli a g b ad sinum lateris a b tanq; sinus anguli a b g recti ad sinum lateris a g, tribus autem primis quantitatibus cognitis, quarta dabitur nota, & ideo arcus a g cognitus. ex duobus demū lateribus a b & a g iam cognitis huius intercedente, & latus b g & angulus b a g numerabuntur. Non aliter argumentabimur latere dato rectum angulū subtendente, erit enim præallegato theoremate proportio sinus anguli a b g recti ad sinū lateris a g dati, sicut sinus anguli a g b dati ad sinum lateris a b, sic iterū duo latera a g & a b cognita uenient, cætera ut prius. Quē si latus datū recto angulo subiaceat, angulo q; non recto dato, quale est in figura latus b g ad huius refugiendū est, per eam enim proportio sinus anguli a g b ad sinum anguli a b g recti est, ut proportio sinus complementi anguli b a g ad sinum complementi arcus b g. tres autem harum quantitatū sunt notæ, de prima & secunda nemo hesitat, quarta uero cognita erit, propter arcum b g datum, hinc sinus complementi anguli b a g notus occurret, ideoq; angulus ipse non latebit. Habebimus igitur tres trianguli cognitos angulos, quamobrem auxilio præcedentis reliqua duo latera innotescent. ☞ Operatio. Si latus datum angulo non recto dato oppositum fuerit, multiplica sinū ipsius lateris per sinum quadrantis, quodq; procreabitur, per sinum dati anguli partiaris, exibit ēm sinus lateris rectū subtendentis, cognito autem ipso latere per sinum suū, ad opus huius confugiendū est. Si uero latus datum recto opponatur angulo, sinū eius per sinum anguli dati extendas, & productū diuidas per sinū totum, existentis enim arcus est ipsum latus quæsitū, deinde operationem huius repetito. Quòd si angulus rectus & reliquus angulus datus lateri dato insideant, sinū lateris dati per sinū complementi anguli dati multiplices, & productū per sinū totum partiaris, exibit enim sinus cōplementi anguli b a g, quo intercedente angulus ipse notus habebitur, deinceps uero opus præmissæ repetemus. In numeris exemplaribus sic habeto. Ponat angulus g 36. gr. & latus a b 20. gr. est sinus 36. gr. est 35267, sinus 20.

20521. quem multiplico per sinum totum, producuntur 1231260000. hunc diuido per 35267. exeunt 34912. sinus scilicet lateris a g. inuenio igitur ex tabula latus a g 34.35. deinde pro latere & angulo reliquis ad numeros huius refugio. Sed maneat angulus g quantus erat, & sit latus a g 20. gr. multiplico sinum 36. gr. qui est 35267. per sinum 20. gr. scilicet 20521. procreantur 723714107. quæ diuido per sinum totū, exeunt 12062. sinus scilicet arcus a b, quare ipse arcus a b erit 11.36. reliqua per huius numerabimus. Ponatur demum angulus a g b, ut prius 36. & arcus b g 20. Sinus 36 est 35267. Sinus complementi 20. est 56382. quem duco in 35267. producuntur 1988423994. hoc diuido per sinum totū, exeunt 33140. scilicet sinus complementi anguli b a g, cuius arcus est 33.32. hic dempto ex 90. relinquet 56.28. & tantus habebit angulus b a g. ipsum em̄ minorē esse quarta circumferentiæ, arguit arcus b g datus minor quadrāte. Reliqua tandem per operationē præcedentis absoluemus. Non egreferas, si solito prolixiores in his tribus propositionibus uideamur, id etiam postulat tenor operationis, nō nihil moræ attulit exemplaris numerorū manuductio, in qua si te satis exercueris, totā fermē artem triangulorū sphæralium facilem arbitraberis.

XXVIII.

Cognitis duobus lateribus trianguli nō rectanguli datū angulum cōtinentibus, reliquū latus reliquosq; angulos cognitum iri.

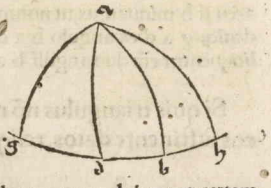
Trianguli a b g nō rectanguli duo latera a b & b g sint data cū angulo b. Dico q; & latus a g, & duo anguli a & g innotescent. Descendat enim ex termino alterius datorū laterū ad reliquum, perpendicularis, quæ necessario intra triangulum consistet aut extra eum cadet, neutri enim laterū sibi conterminaliū poterit coincidere, sic em̄ idem angulus & rectus haberetur & non rectus. Vtrum autē horū fiat nondū scienti allata est facilitas, id enim non immediate pendet ex hypothesi, sed paulo post explorandum dabimus. Cum autem à quolibet puncto sublimi extra circūferentiam circuli signato possimus demittere duas perpendiculares, hoc in præsito eam duntaxat eligemus, quæ subtendit angulū datum. Sit itaq; hæc perpendicularis a d, habebit ergo triangulus a b d angulū b non rectum notum cum latere a b, quare per præmissam uterq; arcuū a d & d b cognitus ueniet. si itaq; arcus b d nunc inuentus minor fuerit arcu b g dato, constabit perpendicularem cecidisse intra triangulū a b g, si uero maior extra, oportet autem differentiam duorū arcuū b g & b d notam esse, triangulus igitur a g d rectangulus duo latera a d & d g habens nota per huius latus sum̄ a g, quod & triangulo a b g commune est, duosq; angulos d a g & d g a notificabit. triāgulus itaq; propositus a b g tria latera nota sunt, eū duobus angulis a b g quidē per hypothesim, a g b autē per argumentationem, erat autem & uterq; angulorū b a d & d a g notus, quibus collectis, si perpendicularis intra triangulū cecíderit, aut minori eorū à maiori subtracto, angulū b a g addiscemus, quæ fuere declaranda. Diceres forsitan, proportio sinus arcus a g per argumentationem cognitī, ad sinū anguli a b g, quem dedit hypothesis, sit ut sinus arcus b g notī per hypothesim ad sinū anguli b a g huius demonstrante. cunctę tres hæ quantitatū sint notæ, & ideo oporteat sinum anguli b a g fieri notum, nonne facilius hoc pacto per unicam operationem inueniemus angulū b a g, q; ingeminando opus duobus angulis b a d & d a g diuisim



uisim cognitis, ipsum angulum b a g eliciemus. Respondeo tibi sinum quidem anguli b a g hac uia reperiri q̄ latissime, quæ tñ duobus respondente angulis incertum est uter eor̄ eligendus sit, id autem minime turbabit uiam nostram, quoniam uterq; angulor̄ b a d & d a g, qualis sit respectu anguli recti certum tradidimus.

XXIX.

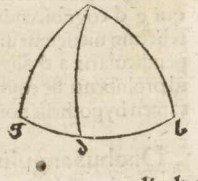
Cognitionem duorum laterum trianguli non rectanguli, & anguli uni eorum oppositi, inuentioni reliqui lateris & reliquorum angulorum minime sufficere.



Similem passionem de triangulis planis rectilineis demonstrauimus in primo huius angulo dato existente acuto, quam nunc de sphæralibus prædicabimus, siue angulus datus fuerit acutus, siue obtusus. Sit enim angulus sphæralis b a g, duobus arcubus æqualibus b a & a g contentus, quorũ uterq; minor sit quadrante, copulenturq; duo puncta b & g per arcum circuli magni b g, qui secetur per mediũ in puncto d descendente arcu a d, in arcu autem g b prolongato, signetur punctus h ubilibet, sic tamẽ, q̄ arcus g h sit semicircũferentia ducto arcu a h. Cum igitur duo triangulí a b d & a g d sint æquilateri, erunt & æquianguli per tertij huius, & ideo duo anguli apud d sunt recti, & angulus b a d est acutus, erit per huius arcus b d minor quarta circumferentiæ, est autem & a b minor quarta, quare per huius & arcus a d minor quadrante declarabitur, unde & per huius angulus a h g acutus erit. Offerenti ergo nobis duo latera g a & a h cognita, aut duo b a & a h ipsis æqualia, cum angulo a h g, neq; tertium latus, neq; reliquos angulos reddere poterimus, nam duo triangulí g a h g & b a h, etsi in omnibus quantitatibus datis participent, latera tamẽ tertia sortiuntur uaria, quemadmodũ in figura claret. Idem declarabitur angulo h obtuso existente. Repetitæ enim pristinæ figurationi iterum dabimus locũ hoc uno uariato, q̄ uterq; arcuũ a b & a g æqualiũ quadrantẽ excedat, erit enim ut nuper angulus b a d acutus, & ideo per huius arcus b d minor quarta, cunq; sit arcus a b maior quadrante, erit & arcus a d quadrante maior, & ideo per huius angulus a h g obtusus, cætera ut antehac prosequemur.

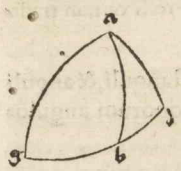
XXX.

Duobus lateribus trianguli non rectanguli cognitis cum angulo alteri eorum opposito, si qua lege datum angulum respiciens perpendicularis cadat exploratum fuerit, reliquum latus reliquiq; anguli non latebunt.



Sit triangulus a b g non rectangulus, duo latera a b & a g nota habẽs, cũ angulo b uni scilicet eor̄ opposito, sitq; certũ quonam pacto cadat perpendicularis à cõmuni termino dator̄ laterũ ad basim, uidelicet an intra an extra triangulũ, quæ sit a d. Dico q̄ & latus b & duo anguli a & g noti uenient. Certi enim principio simus perpendicula-

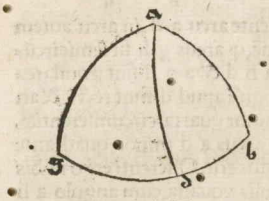
dicularem a d cadere intra triangulum. habebit itaq; triangulus a d rectangulus latus a b cognitum cum angulo a b d, quare per huius duo eius latera a d & d b nota uenient cum angulo b a d. Triangulus demũ a g d duo latera a g



quidem per hypothesim, a d autem per argumentationẽ habebit cognita & ideo per huius & latus eius g d & uterq; duorũ angulorũ a g d & g a d innotescet. Quemadmodũ autem ex duobus arcubus b d & d g seorsum notis arcus b g notus resultat, ita & duo anguli b a d & d a g collecti angulũ totũ b a g reddent cognitum. Quòd si perpendicularis extra triangulum ceciderit, syllogismũ repetemus, nihil prorsus immutando, nisi q̃ arcũ d g ex arcu d b minuamus, ut notum relinquatur latus b g trianguli propositi. angulũ deniq; g a d ex angulo b a d, & angulum a g d ex duobus rectis demamus, relinquentur eñ duo anguli b a g & a g b noti, quod uolebamus attingere.

XXXI.

Si quis triangulus nõ rectangulus duos habuerit angulos cũ latere eos sustinente datos, reliquũ angulũ & reliqua latera cognitũ iri.



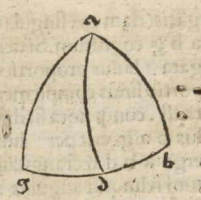
Habeat triangulus a b g nõ rectangulus nota duos angulos a & b, latusq; ipsis subiacens a b cognitum. Dico q̃ & angulus a g b, & duo latera a g & g b innotescent. Descendat eñ à uertice alterius datorũ angulorũ perpendicularis uersus latus nõ datum, subtendens reliquum angulum cognitũ, & sit uerbi gratia a d, quæ cadat ne intra an extra triangulum nondum sciendi est potestas. id eñ nõ statim nostrã cõsequitur hypothesim. Verum paulo longius p fecti hoc explorabimus. Ex angulo igitur a b d cognito, & latere a b trianguli rectanguli a b d per huius & angulus b a d & utrunq; laterum a d & d b cognitionẽ sortientur. Si itaq; angulus b a d syllogismo cognitus minorem se offerat angulo b a g per hypothesim dato, certum est perpendicularẽ intra triangulum cecidisse. angulusq; b a d ex angulo b a g subtatus relinquet angulũ g a d notum. Triangulus ergo g a d rectangulus, cui & arcum a d & angulum g a d notos declarauimus, ductu huius, angulum a g d, qui & triangulo a b g terminis habetur, cum utroq; latere a g & g d in lucẽ depromet. Duo autem arcus b d & d g syllogismo cogniti si coadunentur totum arcũ b g datum accipiemus. Si uero angulus b a d ex argumentatione repertus maior occurrat angulo b a g quẽ hypothesis tradidit, perspicuum erit perpendicularẽ a d extra triangulũ cecidisse. Processusq; superiori cupitã attingemus metam, nihil immutando nisi q̃ arcum g d, quẽ nuperrime arcui d b adiecimus, nunc ex eo reiiciamus, arcus reliqui g d cognoscendi gratia. Sed & angulum a g d duobus rectis subtrahendo relictum metiemur arcum b g, quæ censebã explananda. Nõ poterat autem perpendicularis a d alteri duorũ sibi conterminalium laterum coincidere, hypothesi id prohibenti. sic enim alter duorum angulorum b g & g rectus euenisset, quem tamen hypothesis non rectum administrabat.

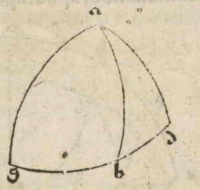
XXXII.

Duobus angulis trianguli nõ rectanguli cognitis cum latere alterũ eorũ subtendẽte, reliquũ angulũ reliquaq; latera inuestigare.

Dati

Sint duo anguli a b g & a g b trianguli a b g non rectanguli cum latere, uerbi gratia, a b, alterum eorũ scilicet angulũ g subtendente. Dico ꝙ & anguli a & utriusq; lateꝛ a g & g b noticiam consequemur. Descendat em̃ ex uertice anguli a non dati, perpendicularis a d uersus latus, quod duos sustẽntat datos angulos, quæ cadat ne intra an extra triangulũ a b g duo anguli b & g cognití huius manuducente declarabunt. Cadat prius intra. Triangulus ergo a b d rectangulus, cum & latus a b datum habeat, & angulũ a b d non rectum, per huius & anguli sui b a d & duoꝛ arcuũ a d & d b noticiam afferet, per eandem deniq; huius latere a d & angulo a g d notis existentibus, & angulus g a d, & duo latera a g & g d innotescent. est autem & a g commune triangulo proposito, latus demũ b g ex duobus arcubus b d & d g singulatim notis, quemadmodũ angulus b a g ex duobus angulis b a d & d a g inuentis conflabitur. Quòd si perpendicularis extra triangulũ ceciderit, non aliter ratiocinabimur, uerũ an gulum d a g, quem prius addidimus angulo b a d, nunc ex eo minuemus, ut relinquatur angulus b a g cognitus. similiter arcus g d ex arcu d b demptus, relinquet latus b g trianguli nostri cognitum, angulocꝫ tandem a g d ex duobus rectis sublato, manebit anguli propositi cognitio, planum ergo reddidimus quicquid præsens pollicebatur theorema.

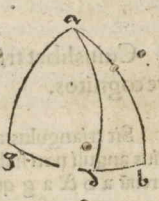




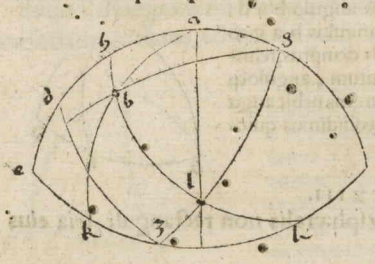
XXXIII.

Datis tribus angulis trianguli sphæralis non rectanguli, tria eius latera mensurare.

Sit triangulus huiusmodi a b g tres notos habẽs angulos non rectos. Dico ꝙ tria eius latera fient cognita. Ex uertice enim anguli cuiuslibet uerbi gratia a uersus arcũ sibi oppositum procedat perpendicularis a d, quæ cadat ne intra an extra triangulũ, huius manuducente callebimus, utroq; angulo b & g nõto per hypothesim existente, neutri enim duoꝛ lateꝛ a b & a g coincidet, sic em̃ alter angulo b & g rectus esset, quod interdixit hypothesis. Cadat ergo prius intra triangulũ, erit itaq; per huius proportio sinus anguli b a d ad sinum anguli d a g, sicut sinus complementi anguli a b g ad sinum complementi anguli a g b. proportio autem sinus complementi anguli a b g ad sinum complementi anguli a g b nota est, ꝓpter utrũq; angulo b & g cognitũ, quare & proportionem sinus anguli b a d ad sinũ anguli d a g datam non inficiaberis. cuinq; totum angulum b a g notum tradiderit hypothesis, erit & per huius uterq; angulorum apud a particulariũ non ignotus. Triangulus igitur b a d rectangulus omnes angulos suos habens cognitos, argumento huius duo latera sua a b & b d cognitioni nostræ subijciet, non aliter trianguli a g d rectanguli, tres angulos habentis datos, duo latera a g & g d metiemur. sic duo latera a b & a g trianguli propositi gemino didicimus processu, duobus autem arcubus b d & d g congre



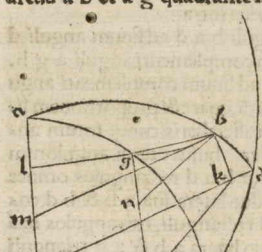
gatis(nam eos ſingulatim dimenſi ſumus)reſultabit tertium latus b g trianguli a b g cognitum. Si uero perpendicularis trianguli egreſſa fuerit,erit ex prælle-gata huius proportio ſinus anguli b a d ad ſinũ anguli g a d nota,quoniã proportio ſinus complementi anguli a b g ad ſinum complementi anguli a g b data eſt. cuncꝫ nota ſit differentia duorum angulorũ b a d & g a d,uidelicet anguli b a g,erit per huius uterꝫ angulorũ b a d & g a d cognitus. Triangulus ergo a b d rectangulus omnes angulos ſuos habet notos,angulũ enim a b d notum relinquit angulus a b g,quem dedit hypotheſis, poſteaꝫ ex duobus rectis auferetur,quare per huius latus ſuũ a b,quod & triangulo a b g commune eſt notum habebitur cum arcu b d. Non aliter ad noticiam duorũ laterũ a g & g d trianguli a g d rectanguli tres cognitos habentis angulos peruenietur. duo itaꝫ trianguli propoſiti latera a b,& a g nota reddidimus,dempto autem arcu b d ex arcu d g,quos geminus eliciuit ſyllogiſmus tertij lateris b g noticiam conſequemur,quæ decreuimus promulgare. His autem poſtremis theorematibus tenorem ọperationis numeroſoꝫ exemplares ſubiungere non erat conſilium, ſatis eñ res huiuſmodi apud ſuperiores concluſiones lucubrauimus, quas ſi memoria tua perdiderit cenſeo repetendas. Trianguli a b g tria latera ſint data, fiant a & g poli circulorũ e k & d 3, intelligaturꝫ paralellus h k ſuper polo g deſcriptus ſecundũ quantitatem arcus g b,quo facto erit opus omnino ſimile ei, ubi ex altitudine ſolis data quæritur diſtantia eius â meridie. ſic habebis quatuor modos demonſtrandi problema de tribus datis lateribus trianguli ſphæralis.



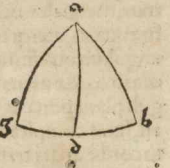
XXXIIII.

Cuiuslibet trianguli tria latera nota habentis, tres angulos reddere cognitos.

Sit triangulus a b g, cuius tria latera nota ſint a b, a g, & b g. Dico ꝙ tres eius anguli noti habebũtur. Libeat primo inuenire angulũ b a g. Si igitur uterꝫ arcuũ a b & a g quadrante minor extiterit, protendatur uterꝫ ad partem lateris b g, donec fiant duo quadrantes a d & a e, & ſuper polum a ſecundũ cordam quadrãtis a d deſcribatur circulus, quem conſtat tranſire per punctum e, qui ſit d e, arcus itaꝫ d e quantitatem anguli b a g quem quærimus determinabit, qui ut notus emergat, procedant â centro ſphæræ 3 tres ſemidiametri ad tria puncta a, d, & e, quæ ſint 3 a, 3 d & 3 e. à punctis autem b & d cordam b g terminantibus, binæ ducantur perpendiculares g h quidem & b k ad duas ſemidiametros 3 e & 3 d, duæ uero reliquæ g l & b m ad ſemidiametrũ 3 a, quas quidem perpendiculares conſtat eſſe ſinus arcuũ, â quoꝝ terminis egrediũtur, duoꝫ tandem pun

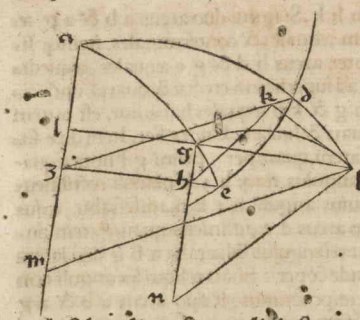


dem puncta h & k copulẽtur per lineam h k. Si igitur duo arcus a b & a g æquales fuerint, erunt duæ lineæ g l & b m æquales & conterminales, itemq; linea g h lineæ b k æqualis quidem propter arcus b d & g e æquales, æquedistans autem per diffinitionem superficiei ad superficiem erectæ & quartã undecimi, unde & per primi duæ lineæ rectæ b g & k h æquales habentur. est autem g b nota scilicet cordæ arcus g b dati, quare & linea h k nota fiet. Item duæ superficies l h & m k sunt æquedistantiũ laterũ, quare per primi g l notæ æqualis erit h 3 & b m cognita ipsi k 3. triangulus itaq; h 3 k planus rectilineus tria latera habens cognita per primi huius angulũ h 3 k manifestabit, cuius quantitatem determinat arcus d e, & ideo arcus d e diffiniens quantitatem anguli b a g notus concluditur. habet igitur triangulus sphæralis a b g duo latera b a & a g cognita cum angulo b a g, unde & per huius reliqui sui anguli non latebunt. Aliter tamen & facilius procedere poterimus, si duo arcus a b & a g æquales fuerint, hoc pacto, ex a puncto descendet perpendicularis arcus a d, qui necessario satis continuatus secabit latus b g ipsius trianguli, quod fiat in puncto d. eritq; b d æqualis g d per quare cũ totus arcus b g sit notus, erit b d datus, per autẽ huius sinus cõplementi b a ad sinum cõplementi a d se habet, sicut sinus cõplementi b d ad sinũ totũ. unde a d notus erit.



Hinc quoq; angulus a b d, & ei æqualis a g b. item tandẽ angulus b a g &c. Si autẽ alter duorũ arcuũ b a & a g reliquo maiorem se offerat, uterq; tñ minor quadrante. sit uerbi gratia arcus a b maior arcu a g, quãobrem alternatim erit arcus g e maior arcu b d, repetitaq; figuratione pristina erit linea g h longior linea b k, abscindatur ergo ex ea portio h n æqualis lineæ b k, ducta linea b n, quã ut supra oportet esse æqualẽ lineæ h k, similiter tam g l lineæ h 3 æqualis erit, q̃ b m ipsi k 3. erit autẽ angulus b n g rectus, cumq; duo latera b g & g n trianguli g b n rectanguli sint cognita. est em̃ b g corda arcus b g per hypothesim noti. g n autẽ differentia duorũ sinuum b k & g h notorũ, erit & latus eius b n per primi huius notum. et ideo h k nota declarabitur. Duas autẽ lineas h 3 & 3 k quẽadmodum ante hac notas declarabimus. tria igitur latera trianguli h 3 k nota sunt. unde angulũ h 3 k & reliqua ut nuperrime dimetiemur.

Quòd si uterq; arcuum a b & a g quadrante maior extiterit, protendantur ipsi donec in puncto s coincidẽt, quo fit ut duo arcus b s & s g noti reddantur. Est enim per primi huius uterq; arcuum a b s & a g s semicircumferentia nota. Triangulus ergo b s g trium notorũ laterum ex iã dictis angulum b s g æqualẽ angulo b a g sortietur cognitum. Ad uiã itaq; pristinã perducti, ex duobus lateribus a b & a g cũ angulo b a g cognitis, reliquos duos angulos huius dirigente inuestigabimus. Postremo sit alter duorũ arcuum a b & a g maior quarta circumferentiæ, reliquus uero minor. & sit uerbi gratia a b quadrante maior, a g autẽ minor eo, resumptaq; figuratione nihil in ea uariabimus, nisi q̃ lineam g h continuemus ad partẽ puncti h, donec h n fiet æqualis sinui b k arcus b d. similiter a 3 semidiameter prolongetur, ita ut b m ipsi perpendiculariter insidere possit. quibus ita dispositis argumẽtabimur hoc pacto Corda b g nota est propter arcum suum notũ. linea g cõplectitur sinum arcus g e noti, & lineã h n æqualẽ b k sinui arcus b d noti. tota ergo g n nota est, an

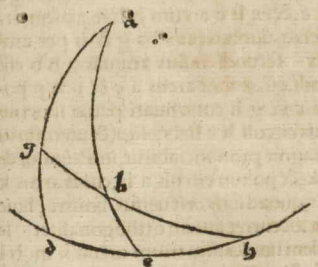


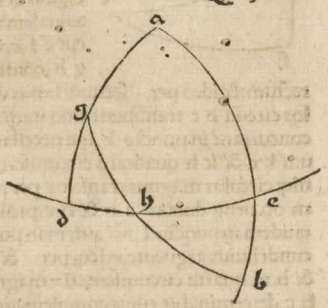
gulus autem b n g rectus est, nã superfi cies h n b k æquedistantibus contine tur lineis, & angulus eius apud k rectus quare per primi huius latus n b trianguli b n g rectanguli notũ erit, cui æqualis est linea h k. trianguli itaq; pla ni h 3 k tribus lateribus cognitis angu lum h 3 k & reliqua quẽadmodum ante hac mensurabimus. ¶ Operationi au tem paꝛ loci dabimus. nihil eñ docebi mus nisi quo pacto reperiantur tria la tera triãguli plani, cuius unus angulus in centro sphæræ quiescẽs respondet an gulo sphærali quæsito, qualis in figura est triangulus h 3 k. reliqua enim in locis suis superioribus satis explanasse uidemur. Siue igitur duo arcus a b & a g æqua les fuerint, siue non, sinus eoꝛ accipiemus pro duobus lateribus continentibus an gulum trianguli plani in centro sphæraꝛ quiescentem, qui respondet angulo sphæ rali quæsito. pro tertio autem latere trianguli plani cordam arcus tertij constituemus, si æquales occurrant duo arcus angulũ quæsitum continentes, qui si fuerint inæquales, uterq; tñ aut minor quarta, aut maior ea sinus cõplemẽtoꝛ arcuũ, qui angulum quæsitũ ambiũt, eliciere, & differentiam eoꝛ in se multiplicatã ex qua drato cordæ arcus tertij minuas, relictiq; radicem quadratã pro latere tertio trian guli plani ponas. Qd si alter eoꝛ maior quadrante, reliquus autem minor eo fue rit, sinus complementoꝛ huiusmodi collige, & summã eorũ in se ductã, ex quadra to cordæ arcus tertij subtrahas, relicti enim radix quadrata laterí tertio trianguli plani adnumerabitur. In exemplo. Sit uteraq; arcuũ a b & a g 20. gr. & arcus b g 36. sinus 20. graduũ est 20521. tantumq; numerabo utrumq; lateꝛ k 3 & 3 h. Si nus 36. gr. est 35267. tantũ est latus h k, similiter faciam, si uteraq; arcuũ a b & a g occurrat 160. gr. & arcus b g 36. redibunt enim pristini numeri. Sed dabit mi hi quispiam latus a b 35. gr. latus a g 16. & latus b g 46. sinus 25. gr. est 25357. quem dabo lateri k 3. sinus 16. est 16538. lateri 3 h adnumerandus corda b g 46888. Sinus complementi 16. graduũ est 57676. Sinus complementi 25. gra. est 54378. quem minuo ex 57676. manẽt 3298. hæc in se faciunt 10876804. quæ sub lata ex quadrato cordæ b g, scilicet 2198484544. manẽt 287607740. quorum radicem quadratam 46772. constituo pro linea h k. Tandem ponatur latus a b 130. gra. latus a g 75. & latus b g 65. Sinus 130. gra. est 45963. pro latere k 3. Sinus 75. gr. 57956. numerus lateris h 3, & corda 65. gr. est 64476. sinus complementi 130. gr. est 38567. sinus complementi arcus a g est 15529. quem addo ad 38567. colliguntur 54096. hæc in se faciunt 2926377216. quæ subtraho ex qua drato cordæ b g, quod est 4157154576. manẽt 1230777360. huius radicem qua dratã 35082. lateri h k deputabo. Perducti igitur ad hypothesim primi huius, quæ nobis angulũ h 3 k cognitũ faciet, unde & angulus d e numerabitur, quod non erit ambiguũ, si ea quæ in processu primi huius cõmemorauimus, memo riæ mandasti. arcus autem d e quantitatem anguli b a g determinat, unde & b a g & reliqui anguli nõ erunt ignoti. Poterimus aũt alio tramite idem attingere. Nam ꝓpositus triangulus a b g habeat duo latera a b & a g inæqualia, utrũq; tamen minus quadrante, & libeat inuenire quantitatem anguli b a g, super pun cto a facto polo describatur circulus magnus in sphæra d h, cuius circumferen-

tiæ oc

tiæ occurrat arcus g b prolongatus in puncto h. duo etiam arcus a b & a g extendantur ad puncta e & d, erit uterq; arcuũ a e & a d quadrans orthogonaliter erectus ad arcũ d h. per autem huius proportio sinus arcus g d ad sinũ arcus b e est tanq; sinus g h ad sinũ arcus b h. est autem uterq; duoꝝ arcuũ g d & b e notus, propter sua complementa a g & a b per hypothesim nota. proportio igitur sinus g h ad sinũ b h nota habebitur, cũq; differentia duoꝝ arcuũ g h & b h sit nota, scilicet arcus g b, erit per huius uterq; eoꝝ arcuũ nota. hinc ex arcu b h & b e cognitis per huius propter angulũ e rectum, complementũ arcus e h & ideo ipse arcus e h innotescet. Similiter ex duobus arcubus g d & g h, arcus d h cognoscetur, quare differentia duoꝝ arcuũ d h & e h scilicet arcus d e non ignorabitur, ipse autem determinat quãtitatem anguli b a g, quare angulus ille notus erit, hinc & reliqui ut antehac notificient anguli. Si uero alter quidem duoꝝ arcuũ a b & a g maior quadrante fuerit, alter aũt minor eo, sit a b maior quadrãte, descriptoq; ut prius circulo magno super a pólo, circumferentia eius secabit arcum g b, quod fiat in puncto, secabit etiã arcũ b g in puncto, qui sit h, arcus aũt a g continuatus, occurrat ei in puncto d, erit autem uterq; duoꝝ arcuum e b & g d notus: sunt enim cõplementa arcuũ datoꝝ, est autẽ proportio sinus b e ad sinum g d nota, sicut proportio sinus b h ad sinũ h d per huius. sic proportio sinus b h ad sinũ h g nota habebitur: cumq; totus arcus b g datus sit per hypothesim, erit per huius uterq; arcuũ b h & h g cognitus. ex duobus aũt arcubus b h & b e cognitis, & propter angulũ e rectum per huius innotescet arcus e h. similiter duo arcus h g & g d propter angulũ d rectum notificabunt arcũ d h, sic totus arcus d e determinans quantitatem anguli b a g non latebit, unde angulus b a g cum reliquis trianguli propositi angulus notus proclamabit. Si uero uterq; arcuum a b & a g quadrantem superauerit, producantur ipsi donec concurrant, eritq; angulus apud concursum eorum æqualis ipsi angulo a, fietq; nouus triangulus super basi b g, cuius duo latera minora quadrante nota erunt, unde reliqua ut superius absoluentur. Operationis autem tenorem præteo, nam ab operationibus huius atq; pendere dinoscitur.

Quarti libri Triangulorum Finis.

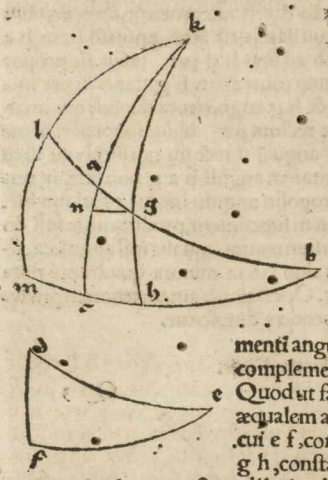




LIBER QVINTVS TRIANGVLORVM.

I.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, qui duos angulos acutos & æquales habeant, latera autem rectos subtendentia angulos inæqualia, erit proportio sinus differentiæ eorum laterum ad sinum differentiæ duorum laterum rectis atq; acutis æqualibus substratorum, tanq; proportio eius, quod sub sinibus complementorum acutis angulis subtensorum laterum continetur, ad id, quod sub sinu toto & sinu cõplementi anguli acuti.



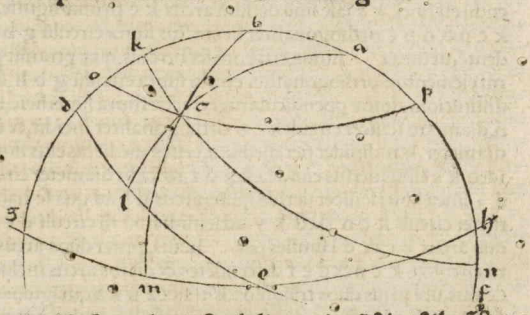
Triangulos huiusmodi ex arcubus circulorum magnorũ unius sphæræ, aut duarum æqualium concludi subauditur, de reliquis enim in præsentiarum nihil differimus. Sint tales duo trianguli a b c & d e f, duos quidem angulos a g b & d f e rectos, duos autem a b c & d e f acutos æquales habẽtes: sitq; latus a b trianguli a b c longius latere d e trianguli d e f, quæ res arguet etiam latus b c unius trianguli longius esse latere e f alterius, si tertium huius satis tenes. Dico itaq;, q̃ sinus rectus differentiæ duorũ laterum a b & d e ad sinum differentiæ duorum laterũ b c & e f proportionem habet, quam id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a b c, siue d e f ad id, quod sub sinubus complementorũ duorũ arcuum a c & d f continetur. Quod ut facilius demonstretur, scindo ex a b arcũ g b æqualem arcui d e, & ex b c arcum b h æqualem arcui e f, continuatisq; duobus punctis g & h per arcũ g h, constabit per secundi huius angulũ g h b esse rectum: & ideo per secundi huius duo circuli, quorũ sunt arcus a c & g h p. polos circuli b c transibunt: duo itaq; arcus a c & g h continuati paulo superius concurrant in puncto k, qui necessario polus circuli b c habebitur, & uterq; arcuum k c & k h quadrans circumferentiæ magnæ pronunciabitur, intelligatur denicq; circulus magnus transiens per polum k, & polum circuli a b, cuius arcus k m occurrat duobus a b & b c prolongatis, quoad satis erit uersus sinistrã, huic quidem in puncto l, isti autem in puncto m: occurret autem orthogonaliter secundi huius arguente, eritq; per & eiusdem unusquisq; trium arcuũ k m, b l & b m quarta circumferentiæ magnæ: unde & arcus l m quantitatem anguli a b c determinabit, cuius complementũ est k l: nemo autem ignorat arcum a g esse differentiã duorũ arcuũ a b & d e. item c h excessum arcus c b super f e, demittatur itaq; ex puncto g perpendicularis arcus g n ad quadrantem k c, proportio igitur sinus a g ad sinum c h componitur ex duabus, proportione scilicet

sinus

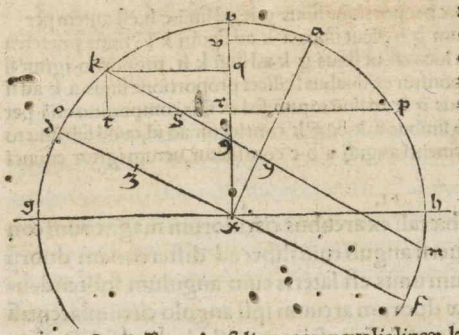
sinus a g ad sinum g n, & ex proportione sinus g n ad sinũ c h, est autem per tertij huius sinus a g ad sinum g n, sicut sinus a k ad sinum k l, sinus præterea g n ad sinum c h ex eodem loco est, ut sinus g k ad sinũ k h. proportio igitur sinus a g ad sinum c h componitur ex duabus scilicet proportione sinus a k ad sinum k l, & proportione sinus g k ad sinũ totum, sed ex illis componitur etiã per sexti elementorũ, quod sub sinibus a k & g k continẽtur ad id, quod sub sinu toto & sinu k l scilicet complementi anguli a b c continetur, uerum igitur enunciabat theorema præsens.

II.

In omni triangulo sphærali ex arcubus circulorum magnorum constante, proportio sinus uersi anguli cuiuslibet ad differentiam duorũ sinuum uersorum, quorum unus est laterũ eum angulum subtendentis, alius uero differentiæ duorum arcuum ipsi angulo circumiacentiũ est tanq; proportio quadrati sinus recti totius ad id, quod sub sinibus arcuũ dicto angulo circũpositorum continetur rectangulum.



Sit huiusmodi triangulus a b g, duo latera habens inæqualia a c maius a b, & utrunq; eorum minus quadrante, super punctis a & b factis polis describant̃ duo circuli magni, quorũ circumferentiæ se secent in pũcto e: prolongentur̃q; arcus a b utriq; donec occurret circulo sup. a descripto in pũctis d & f, circulo aũt sup. b lineato in pũctis g & h, cõstat arcũ g d æqualẽ esse arcui a b; utrũq; aũt arcuũ e d & e g esse quadrantẽ circũferẽtiæ magnæ. cõtinuent̃ denicq; duo arcus a c & b c, donec utercq; eorũ quarta circũferentiæ fiat: hic quidem occurrens arcui d e in l pũcto, ille aũt arcui g e in pũcto m: factisq; iterũ punctis a & b polis, super a quidẽ secundũ quantitatem cordæ a c describat̃ circulus minor in sphera k n: super b aũt secundũ distantiã b circulus minor o p, erit itaq; arcus b k differentia duorũ arcuũ a b & a c, & arcus b o æqualis arcui b c, arcus aũt d l quantitatẽ anguli b a c determinabit. Dico igit̃, ꝙ pportio sinus uersi d l ad differentiã duorũ sinuũ uersorũ, quos habẽt arcus b k & b c est ut quadrati sinus recti totius ad id, quod continet̃ sub duobus sinubus rectis arcuũ a b & a c. Qđ ut apertius demonstret̃, alterã figuratio assumenda est, in qua sit circulus g b h, quemadmodũ in prima sup. centro x, quod & centrũ sphæræ habebit̃, sitq; cõis sectio circulorũ g b h & g e h diameter g h, quã in prima figura lineare nõ decuit confusionis uitandæ gratia, sed & cõis sectio circulorũ g b h & d e f sit linea d f. item duo circuli g b h & k c n secent se in linea k n, duo demũ circuli g b h & o c p in linea recta o p cõuincẽt, deinde educant̃ duæ semidiametri sphæræ x a quidẽ secans lineã k n in puncto y, x b aũt secãs o p in puncto r, constat aũt per huius k n esse diametrũ circuli k c n, & o p lineã esse diametrũ circuli o c p, ꝙ circulus magnus g b h per polos utriusq; eorum in



rũ incedat, punctusq; y erit centrũ circuli k c n, & punctus r centrũ circuli o c p, rursus ex puncto k duæ ꝓueniãt ꝑpendiculares, una quidẽ k t ad lineã o p, alia aũt k 9 ad lineã b x. punctus item a sit caput ꝑpendicularis a u supra lineã b x descendentis. erit itaq; linea a u sinus rectus arcus a b: b q aũt sinus uersus arcus b k, & b r sinus uersus arcus b o siue b c, horũ sinuum uersoꝝ differentia, est linea. q r æqualis lineæ k t. signato iterũ puncto s, in quo cõicant duæ diametri circuloꝝ k c n & o c p scilicet lineæ k n & o p, sciendũ est lineã k s esse sinũ uersum arcus k c primæ figuræ, cũ em̃ uterq; circuloꝝ k c n & o p c orthogonaliter sit erectus supra circulũ g b h, per polos eoꝝ incedentẽ, ut docet huius, erit eorũ sectio cõis, quæ ꝑtransit punctũ s ex undecimi elementoꝝ orthogonaliter erecta supra circulũ g b h, & ideo per conuersionẽ diffinitionis lineæ ꝑpendiculariter erectæ supra superficiẽ, hæc cõis sectio lineæ k n, diametro scilicet circuli k c n orthogonaliter incidit, & ideo hãc sectionẽ cõem diameter k n diuidet per medium, eritq; medietas eius sinus rectus arcus k c, & ideo k s sinus uersus eiusdẽ. cũq; d f recta sit diameter circuli d e f. sumat̃ ex ea d 3 linea sinus scilicet uersus ipsius arcus d l, ad quã se habebit k s sicut semidiameter circuli k c n, q̃ est k y ad semidiametrũ circuli d e f scilicet d x: sunt em̃ duo arcus k c & d l similes per huius, ꝓpter duos arcus a d & a l â polo duorũ circuloꝝ k c n & d e f descendẽtes, & dictos arcus includẽtes. Iã ad portũ accedemus, ubi prius duos triãgulos k t s & a u x æquiãgulos ostẽdemus hoc pacto: duo anguli t k s & r 9 s, ideoq; x 9 y sunt æquales ꝓpter æquedistantiã linearũ k t & r 9, quare cũ uterq; anguloꝝ k t 3 & x y 9 sit rectus, erit reliquus angulus k s t æqualis reliquo y x 9 siue a x u. angulus aũt a u x rectus disponebatur, sunt itaq; duo trianguli k t s & a u x æquianguli, & ideo per quartã sexti & ꝑmutatim ꝓportio x a ad a u sicut s k ad k t. proportio aũt d 3 scilicet sinus uersi anguli b a c ad lineã k t scilicet differentiã duoꝝ sinuũ uersorũ supra memoratorum componit̃ ex duabus scilicet ꝓportione sinus d 3 ad k s, & ex proportione k s ad k t: erat aũt d 3 ad k s sicut d x scilicet sinus totus ad lineã k y, quæ est sinus rectus arcus a k siue a c, & ꝓportio k s ad k t sicut a x sinus recti totius ad lineã a u, quæ est sinus rectus arcus a b. ꝓportio igit̃ sinus uersi arcus d l siue anguli b a c, ad differentiã sinuũ uersoꝝ supradictorũ cõponit̃ ex duabus, ex proportione scilicet sinus recti totius ad sinum rectum arcus a c, & ex ꝓportione sinus recti totius ad sinũ rectum arcus a b. ex eisdẽ autẽ duabus proportiõibus cõponit̃ etiã ꝓportio quadrati sinus recti totius ad id, quod cõtinetur sub sinibus rectis duorũ arcuũ a b & a c. proportio igit̃ sinus uersi anguli b a c ad differentiã duorũ sinuũ uersorum, quos habent duo arcus b o & b k est, ut ꝓportio quadrati sinus recti totius ad id, quod continet̃ sub duobus sinibus rectis duoꝝ arcuũ a b & a c, quod erat demonstrandũ. Hoc tñ non ignorare uideris, ꝙ duo sinus uersi duorum arcuũ b k & b o eam habent differentiã, quã duo sinus recti cõplementorũ

suor

ſuorum: unde ſi in quopiã negocio tuo opus fuerit hoc theoremate, poteris ſupradictã differentiam inuenire, ſubtrahendo ſinum rectũ cõplemẽti alterius duorum arcuũ b k & b o ex ſinu recto cõplementi reliqui eorũ. Aſſumpſimus autẽ duos arcus angulũ, de quo ſermo habitus eſt, minores quadrante, quo demonſtratio noſtra planior putaret: nam ſi fuerit uterq; eorũ maior quadrãte, intelligant prolongari, donec concurrant angulum alium æqualem priori comprehendendo: fiet itaq; nouus triangulus ſupra arcum tertium, cuius duo latera quadrante minora habebuntur. Quod ſi alter eorum minor quadrante, alter uero maior eo præbeatur, tametſi figurationem parumper mutari oporteat, una tamen eadem ſyllogiſmi forma ueritatem theorematis concludet: hoc uno attento, q̃ arcus quilibet cũ eo, qui ſibi ex ſemicirculo deficit, eundem ſinum rectum accipit. Satis ergo certitudinem propoſitionis noſtræ oſtendiſſe uidemur.

III.

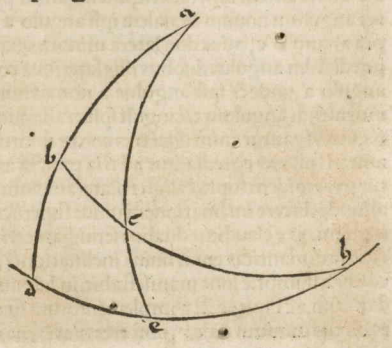
Datis tribus lateribus trianguli ſphæralis ex arcubus circulorum magnorum conſtantis, omnes angulos eius dimetiri.

Etſi propoſitum illud exequi liceat per huius, tamen quo iucundior eſſet ueritatis contemplatio, dum per plures ac diuerſas uias ad eandem metam peruenitur, libuit præcedens theorema propoſito noſtro ſuppeditare. Talis ergo ſit triangulus a b g, ex arcubus circulorum magnorum conſtans, propoſitum eſt inuenire angulum eius b a c, aut alium quemlibet, ſubijciamus tria latera eius inæqualia, nam ſi duo eius quæcunq; latera fuerint æqualia, procedendum erit iuxta monita huius. Cum itaq; ex præcedenti ſit proportio quadrati ſinus recti totius ad id, quod ſub ſinibus rectis duorum arcuum a b & a c continetur, tanq; proportio ſinus uerſi anguli b a c quæſiti differentiam duorum ſinuum uerſorũ, quorum unus eſt ipſius arcus b c, alter uero differentiæ duorum arcuum a b & a c, & tres harum quantitatum ſunt notæ propter hypotheſim, erit & quarta cognita ſcilicet ſinus uerſus anguli b a c, hinc arcus ſuus, qui determinat quantitatem anguli b a c, & ideo angulus ipſe menſuratus offeretur. pro reliquis autem duobus angulis cognoſcendis nihil noui præcipimus, quoniam ex angulo b a c iam cognito cum latere b c eum reſpiciente, reliquiſq; lateribus notis argumento huius, quod reliquum eſt enitemur.

IIII.

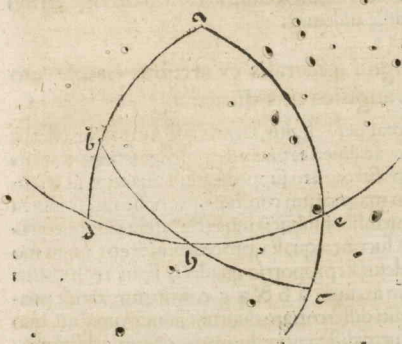
Quod præcedens tradidit alio ſyllogiſmo concludere.

Habeat enim propoſitus triangulus a b c, duo latera a b & a c inæqualia, quadrante diuiſim minora, libeatq; inuenire quantitatem anguli b a c, ſuper puncto a facto polo, deſcribatur circulus magnus in ſphæra d h, cuius circumferentiæ occurrat arcus b c prolõgatus in puncto h: duo inſuper arcus a b & a c extendãtur uſq; ad arcum d h, cui incidant in pũctis e & d, erit itaq; uterq; arcuum a e & a d quadrans orthogonaliter erectus ſupra arcũ d h, duo au



R tem ar

tem arcus b d & c e noti erunt, sunt etenim complementa duorum arcuum a b & a c per hypothesim notorũ, sed proportio sinus recti b d ad sinum rectum c e est per huius, ut sinus recti arcus b h ad sinum rectum h c. proportio igitur sinus recti b h ad sinum rectum h c nota est, cunctq; differentia duorum arcuum b h & h c nota sit, scilicet arcus b c, erit per huius uterq; eorum cognitus, deinde ex duobus arcubus h c & c e notis, & angulo e recto per huius cognoscetur arcus h e, similiter duo arcus h b & b d noti cum angulo d recto notificabunt arcum h d: arcus igitur h e demptus ex arcu h d, relinquet arcum d e cognitum, qui determinat angulum a b c, unde & ille notus habebitur: reliquos autem duos angulos latera sibi opposita per huius notos elicient. Si uero alter duorum arcuum a b & c maior quadrante fuerit, reliquus uero minor eo, sit a c maior, descriptoq; ut prius circulo magno super a polo, circumferentia eius secabit duos arcus a c & b c: hunc ergo secet in e, illum uero in puncto h, prolongeturq; arcus a b, donec occurret dictæ circumferentiæ in puncto d, erit iterum uterq; arcuum b d & c e notus, quoniã sunt complementa duorum arcuum a b & a c datorum, est autem per huius proportio sinus recti b d ad sinum rectum c e, sicut sinus recti b h ad sinum rectum h c propter duos angulos d & e rectos, sic ergo proportio sinus recti b h ad sinum rectum h c nota habebitur, cunctq; totus arcus b c sit notus per hypothesim, erit per huius uterq; arcuum b h & h c cognitus: ex duobus autem arcubus h b & b d cognitis cum angulo d recto cognoscetur arcus d h per huius: similiter duo arcus h c & c e cum angulo e recto, arcum h e notum suscitabunt: duo tandem arcus d h & h e collecti, totũ arcum d e notificabunt, qui determinat quantitatem anguli b a c, unde & ipse notus concludetur, cætera ut antehac perficientur. Quòd si uterq; arcuum a b & a c quadrantem superauerit, intelligantur prolongati donec concurrent, facientes angulum nouum æqualem ipsi angulo a quæsito, fiet itaq; alius triangulus supra arcum b c, cuius duo latera minora quadrante nota erunt. per modum ergo prædictum angulus duobus illis lateribus contentus innotescet, qui est æqualis angulo a, unde & ipse angulus a notus enunciabitur. Est præterea alius modus inueniendi angulum trianguli sphæralis quemcunq; uoles ex tribus lateribus datis, intelligantur enim duci tres cordæ ipsorum arcuum datorũ, tres quoq; semidiametri sphæræ egrediantur ad tria puncta angularia ipsius trianguli: habebis igitur pyramidem supra basim trilateram, cuius sex lineæ notæ sunt, poteris igitur aliunde discere inclinationem unius superficiei lateralis supra aliam, superficiem inquam quæ clauditur duabus semidiametris sphæræ, & una trium cordarum dictarum: quantitas enim huius inclinationis angulum duorum arcuum, quorum cordæ assumptæ sunt manifestabit. in hac autem inquisitione sinus recti arcuum datorum, ac sinus recti complementorum suorum maxime utiles erunt, ne tamen prolixus nimium uidear, post tres uias bonas iam absolutas, hanc quartam prætereundam



tereundam arbitratus sum, præsertim cum ex aliis scriptis meis planè colligi possit.

V.

Datis duobus angulis trianguli sphæralis cum aggregato duorum laterum eis oppositorum, utrumlibet eorum secernere.

Triangulus a b c, duos angulos a b c & a c b notos habeat, congeriemque duorum laterum a b & a c cognitam. Quærimus utrumque eorum seorsum, quoniam per huius proportio sinus recti arcus a b ad sinum rectum a c est, ut sinus recti anguli a c b ad sinum rectum anguli a b c: illa autem nota est propter angulos datos, sinus ergo rectus a b ad sinum rectum a c proportionem habebit datam, cumque aggregatum ex istis arcubus sit datum, erit per huius uterque eorum separatim cognitus, quod erat inueniendum, pro reliquo autem latere, reliquoque angulo cognoscendis huius repetendam censeo.

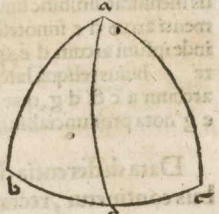
VI.

Datis duobus angulis trianguli sphæralis ex arcubus circulorum magnorum constantis, cum differentia laterum eis oppositorum, utrumque eorum secernere.

Hæc ex quemadmodum præcedens ex huius pendere dinoscitur: erit enim proportio sinus recti unius quæsitorum arcuum ad sinum rectum alterius cognita, propter angulos datos ratiocinante huius: cumque differentiam eorum præbuerit notam hypothesis, uterque eorum procul dubio cognitus emerget.

VII.

Si ab angulo quolibet trianguli sphæralis ad latus sibi oppositum descendat, arcus circuli magni angulum à quo ducitur diuidens per medium, sinus recti duorum arcuum angulo diuiso circumpositorum, & sinus recti portionum lateris diuisi eandem proportionem acceptabunt.

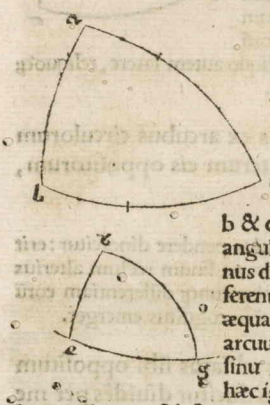


In triangulo tali a b c ducatur arcus a d ex puncto a diuidens angulum quidem b a c per æqualia, arcum autem b c in duas portiones b d & d c. Dico quod proportio sinus recti a b ad sinum rectum a c est, ut sinus recti b d ad sinum rectum d c. Erit enim per huius sinus rectus a b ad sinum rectum b d sicut sinus rectus anguli a d b ad sinum rectum anguli b a d, item proportio sinus recti a c ad sinum rectum c d sicut sinus recti anguli a d c ad sinum rectum anguli c a d: sinus autem anguli b a d æqualis est sinui recto anguli c a d, sinus denique anguli a d b æqualis, imò idem est sinui recto anguli a d c: hi enim duo anguli duobus rectis æquantur, quemadmodum enim duo arcus semicircumferentiæ cõiunctim æquales unum & eundem suscipiunt sinum rectum, ita & duo anguli duo

bus rectis coniunctim æquales in sinu recto communicare oportet. unam igitur habent proportionem sinus rectus a b ad sinum rectum b d, & sinus rectus a c ad sinum rectum c d: permutatis itaq; terminis uerum enunciasse propositionem confiteberis.

VIII.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, quorum angulus acutus unius datus fuerit æqualis angulo acuto alterius, differentia quoq; laterum rectos subtendentium æqualis differentiæ duorum arcuum, qui rectis & acutis datis substernuntur, fueritq; latus unum quodcunq; alterius duorum triangulorum cognitum, reliqua omnia cum ipsa differentia prædicta innotescent.



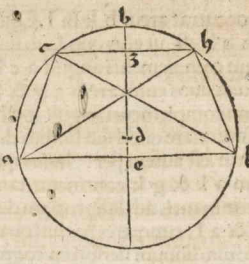
Sint duo trianguli tales a b c & d e g, duos rectos habentes a b c & d e g, duosq; acutos datos a c b & d g e, sitq; latus a c unius longius latere d g alterius. differentia autem duorum arcuum a c & d g æqualis differentiæ duorum arcuum b c & e g, cuius non sit nota: sit demum unus sex arcuum ex duobus triangulis datus. Dico q; omnes reliqui arcus innotescent. Sit arcus b c uerbi gratia datus, ex quo & duobus angulis b & c notis arguente, reliqui duo arcus eiusdem trianguli notificabuntur. est autem per huius proportio sinus differentiæ duorum arcuum a c & d g ad sinum differentiæ duorum arcuum b c & e g, quæ est proportio æqualitatis, sicut eius, quod sub sinibus complementorum arcuum a b & d e continetur ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b siue d g e continetur: hæc igitur duo sub prædictis sinibus contenta sunt æqualia: quod autem sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, est cognitum, propter sinum totum & sinum complementi anguli a c b notos: quamobrem quod sub sinibus complementorum arcuum a b & d e continetur notum erit, est autem complementum arcus a b notum propter ipsum arcum a b prius mensuratum: hinc sinus huius complementi, & ideo per huius sinus complementi arcus d e innotescent, quo demum cognoscemus complementum arcus d e, & inde ipsum arcum d e, qui tandem cum duobus angulis d e g & d g e intercedente huius reliqua latera trianguli sui manifestabit. hinc etiã differentia duorum arcuum a c & d g, quæ ponebatur æqualis differentiæ duorum arcuum b c & e g nota pronunciabitur, quæ fuerunt demonstranda.

IX.

Data differentia duorum arcuum, si quod sub duobus eorum sinibus continetur, rectangulum fuerit datum, utriusq; arcus attingere noticiam.

Duorum arcuum a b & b c differentia a c sit data, quodq; sub sinu arcus a b qui sit a e, & sinu arcus b c, quem uides c 3 continetur, sit datum. Quærimus utriusq;

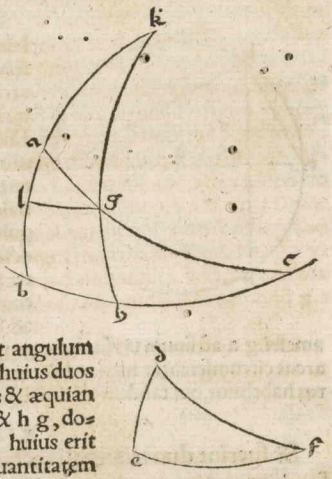
utrunq; arcuum a b & b c. Intellígo autem rectangulum prædictum esse datum respectu quadrati semidiametri circuli: continuatis ita q; duobus finibus a e & c 3, donec in duobus punctis h & k circumferentiæ desinant, ducantur cordæ a c, a h, k c & k h. cum igitur quod sub a e & c 3 continetur datum sit, erit quod sub duplis earum continetur datum, hoc etenim ad illud quadruplum conuincitur ex sexti elementorũ, cui si addiderimus quadratum cordæ a c, id est, quod sub a c & h k æqualibus quidem propter æquedistantiam cordarum a k & c h: notis autem propter arcum a c ex hypothesi notum, colligetur quadratum cordæ a h cognitum: est namq; a h diameter quadranguli a c h k circulo inscripti æqualis c k diametro eiusdem: quod autem sub duabus diametris huiusmodi quadranguli continetur, æquum est ei, quod sub binis laterib us eius oppositis concluditur: hinc corda a h &, arcus eius a h innotescent, ex quo si demperis arcum a c notum, relinquetur arcus c h cognitus cum eius dimidio c b, cui si addideris arcum a c notum, resultabit totus arcus a b cognitus, cuius obtentu hactenus cursum est.



X.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, quorum angulus acutus unius æqualis angulo acuto alterius, duo autem latera rectos angulos subtendentia habuerint differentiam notam, itemq; duo latera rectis & acutis datis subiacentia differentiam cognitam habuerint, omnia eorum latera innotescent.

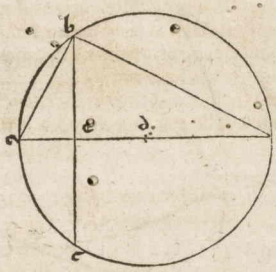
Sint duo trianguli a b c & d e f, duos angulos rectos a b c & d e f habentes, duosq; a c b & d f e acutos æquales & datos: latus autem a c unius uerbi gratia sit longius latere d f alterius, quorum differentia sit data, differentia quoq; duorum laterum b c & e f sit cognita. Dico q; omnia latera horum triangulorum nota uenient. Si enim duæ datæ differentiæ fuerint æquales, per huius propositum comparabimus. si uero inæquales offerantur, scindam ex a c arcum g c æqualem arcui d f, itemq; ex b c arcũ h c æqualem arcui e f, ductoq; arcu g h, constabit angulum g h c esse rectum, oportebit enim per huius duos triangulos d e f & g h c esse æquilateros & æquiangulos: continuẽtur deinde duo arcus b a & h g, donec concurrent in puncto k, qui per huius erit polus circuli b c, super quo secundum quantitatem k g describatur circulus minor in sphæra, cuius arcus



g l occurrat arcui b k in l. Quia autem per huius proportio sinus a g ad sinum b h est, ut eius quod sub sinibus arcuum a k & g k ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, tres autem harum quantitatum notæ sunt, duos enim arcus a g & b h dedit hypothesis, quod autem sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur notum est, propter angulum a c b datum: quare quod sub sinibus duorum arcuum a k & g k continetur, notū habebitur. est autem per huius quadratum sinus totius ad id, quod sub sinibus arcuum a k & g k continetur, tanq; sinus uersi anguli a k g, siue arcus b h eum determinantis ad differentiam duorum sinuum uersorum, quos habent duo arcus a g & a l: cunq; tres harum quantitatum sint notæ, ut patuit, erit & differentia dictorum sinuum uersorum cognita. cunq; arcus a g per huius sit maior arcu a l, & ipse notus est p hypothesim, erit eius sinus uersus cognitus, à quo si demptis prædictam differentiam duorum sinuum uersorum, manebit sinus uersus arcus a l inuentus: hinc arcus a l non poterit latere, qui est differentia duorum arcuum a k & g k: quod autem sub sinibus a k & g k continetur, notum prīdē concludebatur, & iam differentiam eorum arcuum notam reddidimus, quare ex præmissa uterq; eorum cognitus offeretur, hinc sua complementa, arcus uidelicet a b & g h innotescent: ex arcu deniq; g h duobusq; angulis g h c & g c h datis huius ratiocinante, uterq; arcuum g c & h c, qui sunt æquales duobus d e & d f cognoscetur, quibus si adiecerimus duos arcus a g & b h, ex hypothesi notos resultabunt duo arcus a b & a c cogniti: trina igitur latera propositorum triangulorum nota fecimus, quod erat proclamandum.

XI.

Sinu uerso alicuius arcus ad sinum rectum eiusdem proportionem habente notam, arcum ipsum innotescere.

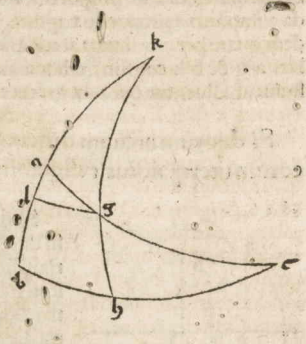


Sit in circulo a b g c diametrum a g habente, cordā b c, quam diameter per medium secet in e, cōstabit itaq; a e esse sinum uersum arcus a b & b e sinum rectum eiusdem: det ergo quispiam nobis proportionem a e ad b e. Dico q; arcus a b cognitus redidet. Ductis enim duabus cordis a b & b g, erunt per 30. tertij & 8. sexti elementorum duo trianguli partiales a b e & e b g sibi inuicem & toti triangulo a b g similes, & per corollarium eiusdem octauæ linea b e medio loco proportionalis inter g e & e a, cunq; proportio b e ad e a sit cognita, erat enim a e ad e b data, erit & g e ad e a data proportio, & coniunctim totius diametri g a ad sinum uersum a e proportio fiet, diametrum autem circuli, ppter arcus circumferentiæ metiendos notam supponimus, quare & sinus uersus a e notus habebitur, qui tandem arcum suum a b non sinet ignotum.

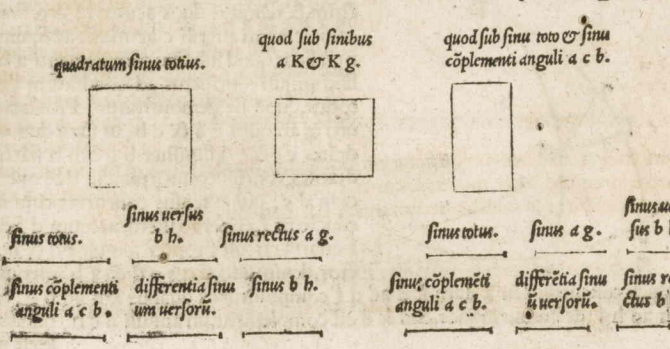
XII.

Si fuerint duo trianguli rectanguli, quorum angulus acutus unius fuerit æqualis angulo acuto alterius dato, differentia etiam laterum rectis an

ctis angulis oppositorum fuerit data, cum differentia laterum acutis angulis subtensorum, omnia latera triangulorum cognita reddere.



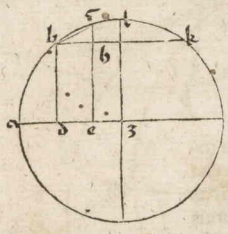
Resumpta figuratione huius datos, supponamus duos arcus a g & a l differentias uidelicet arcuum angulos datos subtendentium. Quærimus omnia latera duorum triangulorum hoc pacto: Proportio quadrati sinus totius ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, per primam sexti est ut proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b, sumpto sinu toto tanq; altitudine communi ambobus rectangulis: hæc autem componitur ex duabus proportionibus, scilicet proportiõe quadrati sinus totius ad id, quod sub sinibus a k & g k continetur, & proportione eius, quod sub sinibus a k & g k ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur: prima harum componentium per huius est, ut sinus uersi arcus b h ad differentiam duorum sinuum uersorum, quorum unus est ipsius arcus a g, alter uero arcus a l: secunda uero cõponens est, ut sinus recti a g ad sinum rectum b h: quare proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b componitur ex duabus, proportione scilicet sinus uersi b h ad differentiam duorum sinuum uersorũ, quos diximus, & ex proportione sinus recti a g ad sinum rectum b h, & ideo etiam proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b componitur ex proportionibus duabus, scilicet proportione sinus recti a g ad differentiam duorum sinuum uersorum prædictorũ, & proportione sinus uersi b h ad sinum rectũ eiusdem arcus b h, hæc autem proportio composita est cognita propter sinum totum, & sinum complementi anguli a c b dati, cognitos, prima denique componẽs est nota: est enim arcus a g datus, & ideo sinus eius rectus cognitus: itẽ arcus a l est datus, ipse enim est differentia duorum arcuum a k & g k, siue duorũ a b & g h, qua-



g h, quare utercꝫ arcuum a g & a l sinum uersum accipiet notum, quorũ sinuũ uersorum differentia non latebit: sic igitur prima proportio componens notos habet terminos, ea autẽ proportiõe subtracta ex ipsa proportione, relinquet secunda componens proportio cognita, quæ erat sinus uersi b h ad sinum rectum eiusdem, quare per huius arcus ipse b h non ignorabitur, ex duobus autem arcubus a g & b h cognitis, reliqua quæ proponebantur quærenda, argumẽto huius absoluentur, quorum gratia contemplati sumus.

XIII.

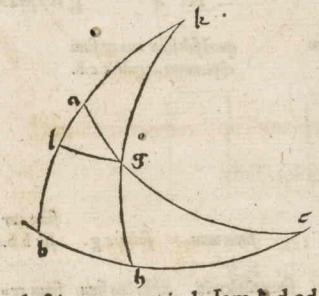
Si duorum arcuum differentia data fuerit, cum differentia sinuum eorum utercꝫ notus resultabit.



Sint duo arcus a b & a c, quorum differentia b c sit data, duo autem sinus eorum b d & c e differentiam habeãt cognitam. Dico ꝙ utercꝫ eorum innotescet. Duco enim cordam b k orthogonaliter incidentem sinui recto c e in puncto h, eritcꝫ c h differentia duorum sinuum, subtendatur etiam arcui b c corda sua b c, quã oportet esse notã propter arcũ ipsum datum: sic ex duabus lineis b c & c h notis angulo apud h recto existente, per primi huius angulum c b h metiemur, ac si in centro alicuius circuli quiesceret: nunc autem, quoniam in circumferentia supra arcũ cõsistit, erit & arcus eũ subtẽdens, scilicet arcus c k notus, cui si adiunxerimus arcum b c, ex hypothesi notum, totus arcus b k notus redundabit, & ideo dimidius arcus b l, inde quocꝫ complementum suum a b innotescent: ex arcu autem a b & b c notis cognoscetur totus arcus a c notus, sic utruncꝫ memoratorum arcuum notum effecimus, quod erat absoluendum.

XIIII.

In omni triangulo rectangulo duos habente acutos angulos, sicut sinus complemẽti anguli cuiusuis acuti ad sinum totum, sic, quod sub sinu complementi lateris sibi oppositi, & sub sinu reliqui acuti continetur ad quadratum sinus totius.

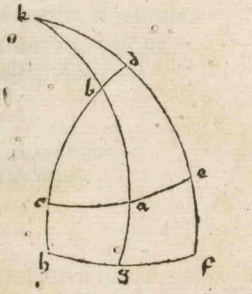


Triangulus a b c habeat angulum a rectum, & reliquos duos acutos. Dico sinum complementi anguli c acuti esse ad sinum totum sicut quod sub sinu complementi a b & sinu anguli continetur ad quadratum sinus totius, quod sic demonstratur. Producatur utercꝫ arcuum c a & c b, ut fiant duo quadrates c e & c d, similiter b g & b h fiãt quadrantes, continuenturcꝫ puncta d & e per arcum d e, qui extensus concurrat cum h g educto in f, erit ergo utercꝫ arcuum d f & h f quarta circuli propter angulos d & h rectos. denicꝫ duo arcus e d & a b inferius educti concurrant in k. Iam k d ad d f componitur ex duabus k b ad b g, & g h ad h f, de sinibus loquor. Sed k d est complementum anguli a c b, quoniam k est po-

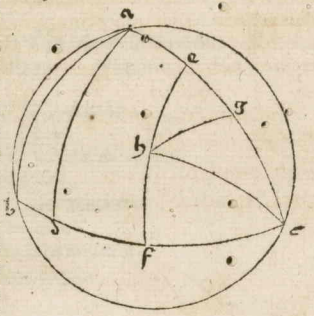
k est polus circuli c e, ppter angulos a & e rectos. k b autem est complementum lateris a b oppositi angulo a c b, & g h est quantitas anguli a b c, unusquisq; autem arcuum d f, b g & h f est quadrans circuli. Cum itaq; proportio eius, quod sub antecedentibus componentium continetur rectangulum ad id, quod sub consequentibus eorum continetur, id est ad quadratum sinus totius ex eisdem proportionibus componentibus componitur, patet propositio.

XV.

Dato triangulo sphærali circulum circumscribere.

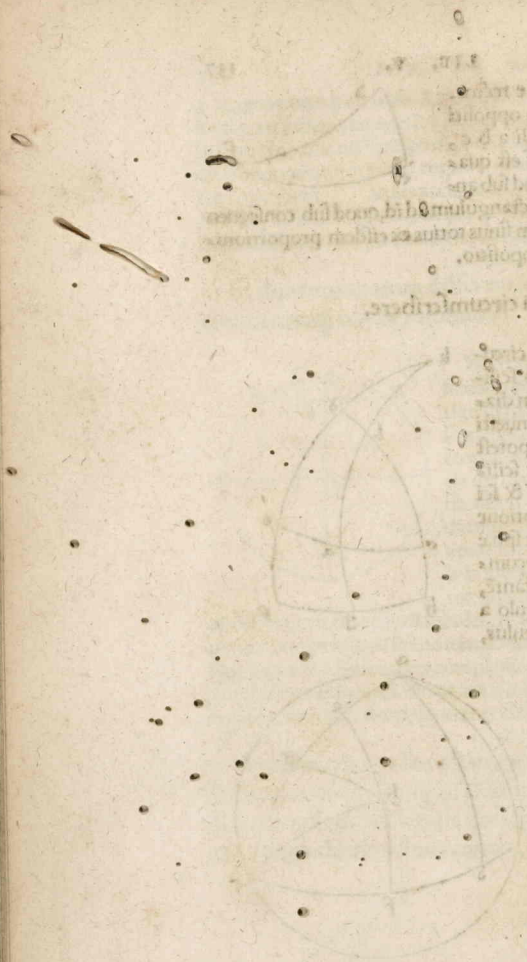


Modus circumscribendi & inscribendi circulos est, ut in rectilineis triangulis, diuidendo scilicet latera per æqualia, aut angulos etc. uerum diametrum circuli circumscripti aut inscripti inuestigare, alia requirit media. Dupliciter nanq; potest inueniri diameter circuli circumscripti, aut scilicet per tres cordas notas, aut per arcus ipsos & scientiam triangulorum sphæralium, de inscriptione non sic, nam quicunq; circulus circumscribit sphæricum triangulum, is etiam rectilineum circumscribit, ex tribus cordis trium arcuum cotistantē, quod inscripto circulo non accidit. Triangulo a b c sphæralo circumscriptus esto a b c circulus, cuius semidiametrum quærimus per rationem arcuum. Sit a d arcus perpendicularis ad b c, b c per medium diuidatur in f puncto, unde exeat perpendicularis f e, in quo necesse est esse polum circuli circumscripti. diuidatur item a c per medium in g, eductusq; perpendicularis occurrat arcui f e in h, qui erit polus circuli circumscripti. ex tribus autem datis lateribus angulum c habebis, & deinde propter f c notum perpendicularis quoq; f e cum angulo f e c innotescet, & cum arcu e c, hinc e g notificabitur. & deinde propter angulum e notum arcus g h patefiet. cunq; & g c notus sit, erit etiam h c notus, qui inter polum & cuspidem anguli c, id est circumferentiam circuli circumscripti comprehenditur.



Quinti & ultimi libri Triangulorum finis.

NORIMBERGAE APVD IO. PETREIVM,
ANNO CHRISTI M. D. XXXIII.



IOANNIS DE REGIO MONTE GERMANI, NATIONIS FRANcicæ, Mathematicarum disciplinarum principis, De quadratura circuli, dialogus, & rationes diuersæ separatim aliquot libellis exquisitæ: Ad ea de re Cardinalis Cusani tradita & inuenta: quibus autor hæc præscripsit uerba Græca, quæ, ne quid illius subtraheremus studiosis, subijci curauimus.

ἐπιχειρήματα ποικίλα πρὸς τοὺς τοῦ κύκλου τετραγωνισμοὺς Νικόλεω τοῦ Κουσαίου ἐκδεδομένους.

εἰς τοὺς ἐξοχωτάτους μαθηματικοὺς. Ιωάννην ῥηγιομοντία καὶ διδάσκαλον αὐτοῦ γεώργιον πουρπάχιον. Ιωαχίμου.

καὶ ποτ' ἀρηϊφίλοις ἐν' ἀθηναί' εἶδ' ἄλεμαν οἷς
οὐρανίης ἱεροὺς ἐκδιδαχθέντα νόμους.
τὸν βασιλέως ἀπ' ὄρους φραγκῶν, γένος ἀνδρ' ἰωάννην
τόν τε καθηγητὴν τοῦδε πουρπάχιον.
καὶ τότε δὴ θαύμασε καὶ αὐτὴν ὧδε προσεῖπεν
οὐδ' οἶν ζήτησεν καὶ τις ἔτετμεν ὁμῶς.
ἀλλὰ καὶ ἅττα πόνω τε χρόνωτ' ἐπεδίσσατο μακρῶ
ταῦτ' ἄρα πελπίστως οὐδέ τις εὗρεν ὅλως.

IOANNES SCHO-
NER CAROLOSTADIVS GEOR-
GIO TANSTETERO REGIO MEDICO S. D.

VM aliquando, ut sæpe faciõ, uersanti mihi relictos ex opulentiss. bibliotheca Ioan. de Regiomonte libros, nec numero nec argumento cum amissis cõparandos, sed qui tamẽ omnes essent optimi, uenisset in manus meas libellus de quadratura circuli comparatus à Regiomontano aduersus inuenta hac de re Card. Cusani: statim dignus mihi libellus uisus fuit, qui studiosis Mathematicarum disciplinarum communicaretur: sed per ocium introspicienti hoc multo magis, quo melior utiliorq; apparuit. Cum autem placeret mihi commendari hunc libellum præter autoris opinionem etiam alicuius horum temporũ excellentis uiri nomine, tu mihi in primis occurrebas, qui quamuis egregium librum accessione famæ tuæ ornare augereq; posses, Georgi Tanstetere, propter eximiam & perfectã cognitionem rerum Mathematicarum, quarum doctrina eã laudem & gloriam es adeptus, ut cum ueteribus facile parem te præstantia tua faciat, tum quem conferre tecum ex omnib. nationib. iure possimus inueniatur nemo. Mihi igitur, & admiranti te & colenti, quod tibi ignotũ esse nequit, diu iã curæ fuit declarandæ uoluntatis, iudicijq; de te mei omnibus si possem mortalibus. Qua in cupiditate quæ aptior occasio potuisset sese offerre mihi, quam dedicandi tibi hunc libellum, doctissimi uiri, utriq; nostrum natione, mihi etiam patria coniuncti. Cuius ut magnitudinẽ doctrinæ Italicos etiam & Græcanicos cõstaret admiratos, ita relinqueretur intelligendum omnibus, quanti te faceremus, cuius nomen ornamento clariss. autoris singulari scripto futurum esse iudicassemus. Nec te inuitum testimoniũ iudicij nostri admissurum confido, quum & te honorifice de me sentire, & nos diligentia & laboribus innotuisse studiosis, illorumq; nonnullam esse existimationem de meis studijs sciam. Quod si quis rem ipsam, & illud, quo de agitur, expendere uolet, inuenietur profecto celebritate tua dignissima materia. Nam tanto ab hinc annorum interuallo tentatum opus, nec postea de manibus doctorum depositum, ad nostramq; ætatem usq; retentũ, certe debet nequaquam contemnendũ uideri. Inuenio autem Anaxagoræ tribui in circuli quadratura exquirenda, singularem laudem, eumq; in carcere, in quem esset coniectus ab Athenienſibus,

tanq̃ impietatis damnatus, illam rationem conscripsisse. Græci uocãt περιφερειῶν κύκλου, unde non, ut opinor, ineptiss. quadraturam latine fe cerunt. Sed hanc rem multis seculis post Archimedes putatur diligen tia summa exquisiuisse. Siquidem Anaxagoram constat Periclis tem poribus uixisse, qui & auditor fuerit illius. Ita inter Archimedem & Anaxagoram ferè intercident anni ducenti octoginta octo. Possent alij nominari, ut Antipho, Briso, Hippocrates, Apollonius, qui & ip si hoc spaciũ decurrisse.nt, mensurationis curuæ lineæ ad regulã. Sed proxime Cardinalis Cusanus hanc quasi prouinciam gnauissime ad ministrauit, rei difficilis, & ut ignoratæ, ita opinor effugientis captũ humanũ, quãuis cognitione comprehendi posse Aristoteles scripse rit, inuenisse rationem profe.Tus. Cuius breui libello summã, eandẽq; breuiori dialogo exposuit. Quæ Ioanni nostrati acutiss. ingenij ho mini cum non probarentur, instituit in illa quasi inquisitionẽ quandã ad Paulum Florentinũ illis temporibus in omni genere scientiarũ pe ritum. Cum autẽ neq; gloriæ neq; emolumenti spe, multoq; adeo mi nus inuidia incitatus, hoc opus suscepisset, ne nominauit quidem ferè Cusanum, tantum abest, ut illius aliquem famæ labem aspergere cona tus fuerit. Reliquimus autem omnia in Regiomontani scripto, sicut in archetypo ab ipso informata quoq; alicubi tantũ offendimus, iucun dam futurã rati studiosis non cognitionẽ modo eorum, quæ ille acu tiss. exquisiuisset, sed exquisitionis etiam quasi uiam & rationẽ, atq; adeo non solum quid autor effecisset libenter uisuros, sed quos etiam habuisset inter opus cogitationes & animi motus. Accipies igitur à nobis doctiss. uir & hunc libellum exiguum munusculum, & admit tes testimonium de te nostrum grato libentiq; animo. Et nos, ut feci sse te comperimus, ita perges tua beneuolentia complecti. E Norico pridie idus Iulij, anno M. D. XXXIII.

QVADRATVRA CIRCVLI D. NICOLAI DE CV sa, Cardinalis, Legati, Episcopi Brixiensis.

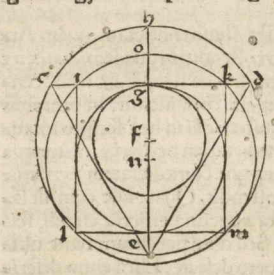
QVAMVIS iam dudum â studio Geometrico nos altior speculatio ac publica retraxerit utilitas: tamẽ inter innumeras seriosas curas, quas habet apostolica legatio, se inter colloquia studiosorum delectabiliter immiscuit, De quadratura circuli scibili & non scita, assertio: Quam dum nuper equitando reuolueremus, quod attigimus conscripsimus.

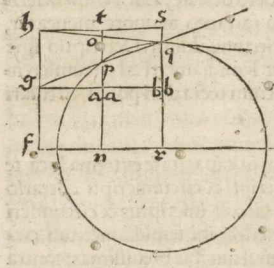
Non legimus quenquam propinquius accessisse ad huius noticiam, quàm Archimedem, qui primo quadrangulũ circulo æquari ostendit: in quo semidiameter circuli ducta est in mediam periferiam. hoc quidem sic esse necesse est, si hoc censendum est esse æquale, quod nec maius nec minus esse conuincitur. In omnibus enim poligonijs, issopleuris & issoperimetris, de quibus solũ in hoc scripto loquimur, semidiameter circuli inscripti si ducitur in medietatem periferiæ, oritur quadrangulum æquale. Posse autem inter semidiametrum & medietatem periferiæ medium proportionale facile constitui Euclides ostendit. Quare tale cum sit latus quadrati æquiualentis, conscito quæ linea recta æquetur periferiæ circuli, scitur & eius quadratura, & hæc est certior ostensio. Sed dum per elicam hanc ultimam partem se reperisse crederet Archimedes, â uero defecit. Elica enim describi nequit, nisi signum â centro per semidiametrum in tanto tempore moueatur, in quanto semidiameter pro circuli descriptione circumuoluitur. Descriptio igitur elicæ hos motus supponit, quorum habitudo est ut semidiametri ad circumferentiam. Præsupponit igitur id, quod quærit. Citius enim recta dari potest circulari lineæ æqualis, quàm elica uera figurari.

Nos autem considerantes trigonum & circulum in capacitate extrema loca tenere: in trigono semidiametros circulorum, & inscripti & circumscripti cõtrario modo se habere, cum semidiametro circuli, in quo circuli inscriptus & circumscriptus coincidunt, qui differunt in trigono maxime: esseq; ibi semidiametrum circumscripti maximam, & inscripti minimam, & simul iunctas breuissimas: contrario modo in circulo ubi simul iunctæ sunt diameter circuli maxima. Ob hoc scimus, omnes medias poligonias issoperimetras & issopleuras secundum capacitatem in illis ad æqualitatem semidiametri circuli accedere. Si igitur signata fuerit quantitas excessus semidiametri circuli, super diametrũ inscripti trigono: & quantitas quo ipsa semidiameter circuli fuerit minor semidiametro circũscripti trigono: tunc omnis poligonia media secundum suam capacitatem in excessu semidiametri sibi inscripti super semidiametrum inscripti trigono: & diminutione semidiametri sibi circumscripti, â semidiametro circumscripti trigono proportionaliter se habebit. Nam cum illa ex diuersa capacitate uarientur, non potest diuersa esse habitudo illorum ab habitudine capacitatum. Sic semper necesse est, quòd sicut se habet excessus ad excessum, etiam sic se habeat diminutio ad diminutionẽ: cum capacitas ita sequatur unam diuersitatem sicut aliam, & non plus nec minus unam quàm aliam. Erunt igitur in omnibus poligonijs excessus & diminutio ta-

les se ad inuicem habentes in proportione una: quare data una habitudine, per illorum scientiam in nota aliqua poligonia, tunc scitur & in circulo. Et quia excessus & diminutio in circulo simul iuncti æquantur semidiametro inscripti trigono ut de se patet. Igitur si reperta habitudine diuidentur secundum eam semidiameter inscripti trigoni, & maior portio adderetur ad ipsam semidiametrum circuli inscripti trigono haberet semidiameter circuli issoperimetri, & ita oē quæsitum.

Faciemus autē hanc partem tibi hoc modo clariorem. Ex a b linea in tres partes diuisa, c d e triāgulus designetur, & in eius latere c d signetur pars quarta a b, quæ sit i k, quæ quadretur, & fit i k l m. Describantur inscripti & circumscripti circuli, & sit inscripti trigono semidiameter f g, & circūscripti f h, & inscripti tetragono n g, circūscripti n o. Signetur deinde linea f h, & in eius medio g, lineis de f g h tractis quantumlibet, trahatur ad f h æque distans r n, cuius medium sit aa, & signetur semidiameter inscripti alicuius poligoniæ issoperimetræ, puta tetragone, quæ sit n p, & semidiameter circūscripti, quæ sit n o, & trahe de g per p in infinitum, & similiter de h per o lineam in infinitum, & ubi ille concurrunt signa q, trahe p q æquedistantem ad f h, quæ sit s r, in cuius medio signa bb. Dicimus r q esse semidiametrū circuli quæsiti, & eius circumferentiam æqualē a b lineæ rectæ.

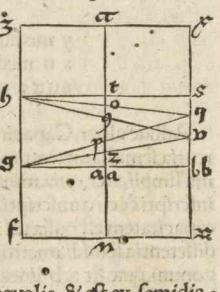




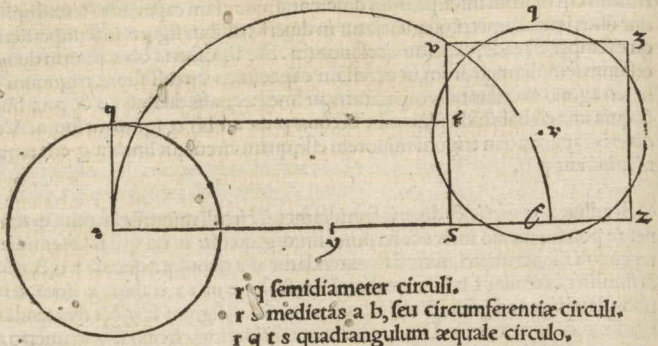
Multipliciter probatur & faciliter. Seruata igitur priori figura, ponatur g bb linea esse differentiam capacitatum trigoni & circuli issoperimetri, & quod linea de r s moueatur uersus f h æquedistanter. Manifestum est, lineas h q & g q de illa abscindere omnes differentias semidiametroꝝ circulorum inscriptorum & circūscriptorum omnium figuraꝝ poligoniarum de trigono usq; ad circulum ubi coincidunt. Est etiā manifestum, q; simul linea illa mota abscinderet de linea bb g omnes differentias capacitatum inter trigonum & circulum. Nam quanto differentia semidiametrorum differentiarum est minor, tanto figura capacior. Ideo circulus capacissima figurarum, quia ibi coincidunt, & trigonus minimæ capacitatis, quia ibi maxime differunt. Sit igitur linea mota t n, quæ abscindat lineam g bb, in aa puncto, & sit p o differentia semidiametrorum in tetragono, quare si g bb est ut differentia capacitatum trigoni & circuli issoperimetri, erit g aa ut differentia capacitatum trigoni & tetragoni. Et quia n p est ex præsuppositio semidiameter inscripti tetragono, & aa p excessus eius super f g semidiametrum inscripti trigono. Ideo bb q erit excessus semidiametri circuli issoperimetri super semidiametrum inscripti trigono. Nam quæ proportio bb g ad aa g, illa bb q ad aa p, ut notum est. Correspondent autem differentiæ semidiametrorum inscriptoꝝ in poligonijs issoperimetris cum differentijs capacitatum. Non enim euenit aliunde capacitatum differentia in issopleuris & issoperimetris, nisi ex semidiametroꝝ

trorum circulorum inscriptorum differentia: quoniam capacitas ex multiplicatione illius semidiametri, quæ uariatur in diuersis talibus figuris in semiperiferiam quæ semper est eadē, exoritur ut est notum. Sic si posueris bb s lineam duorum excessuum semidiametrorum, ut excessum capacitatis circuli super trigonum erit in tetragono excessus talis capacitatis, ut linea æqualis duabus t o & p aa lineis, & quia una est habitudo illius ad s bb, quæ p aa ad bb q, igitur ut supra. Vel si dixeris capacitatem trigoni minorem esse, quàm circuli, ut linea a g erit tetragoni minor ut p o.

Si adhuc negaueris, & dixeris semidiametrū circuli minorē esse, puta q terminet in puncto medio inter s & terminū lineæ g, quæ sit u, ita q e u sit semidiameter circuli isoperimetri, tunc si sic extendatur u s, quousq; æquetur r u, & sit r x, & similiter extendat f h ad æqualitatē r x, & sit z ut r x, trahe z x lineā, deinde trahe de u lineas ad g & h, & ubi secauerint t n lineā signa 2 & 9, & t n extendat usq; ad z x, & sit c c n ut r x. Dico, q si diameter inscripti circulo isoperimetro addit super semidiametrum inscripti trigono quantū est bb u, tūc semidiameter inscripti tetragono addit quantū est aa 2, igit si semidiameter inscripti tetragono addit quantum est aa p, tunc semidiameter circuli isoperimetri addit quantum est bb q. Hoc de se patet, si habitudo additionum est ut bb u ad aa 2, & nota est additio in tetragono, quæ est ut aa p, igitur erit in circulo ut bb q, cum una sit habitudo aa p ad bb q, quæ aa 2 ad bb u. Quod autem illa sit habitudo probatur. Nā si r u ponatur semidiameter inscripti circulo, erit u x semidiameter circumscripti, quæ coincidunt in circulo isoperimetro, & manifestum est, quòd r x est linea ex

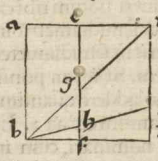


duabus illis semidiametris, & similiter f z est linea illi æqualis, & est ex semidiametro inscripti trigono & semidiametro circumscripti eidem. Omniū igitur poligoniarum inter trigonum & circulum duæ semidiametri tales non erunt minores f z, nec maiores r x, & ita semper æqualis, erit igitur n cc æqualis duabus illis semidiametris in tetragono, & quia 2 9 æquatur necessario p o, cum g h q trianguli æquetur g h u, ob æquedistātiam q u & g h, & similiter o 2 sit æquedistans ad g h, hinc 9 2 erit ut p o, ut ex Euclide scilicet 37. primi, & 4. sexti notum tibi ex istit. sed p o est excessus semidiametri circūscripti trigono super semidiametrū inscripti eidem, igitur & 2 9, & cum n 2 æquetur cc 9, igitur n 2 erit ut semidiameter inscripti tetragono, & 2 cc ut semidiameter circumscripti eidem. Si igitur ponit semidiametrum circuli super semidiametrum inscripti trigono addere quantum est bb u, addet necessario semidiameter inscripti tetragono quantum est aa 2. Et hæ additiones possent capacitates super capacitatem trigoni nominari, cum in isopleuris & isoperimetris capacitatum excessus ex his solum proueniat. Habitudo igitur additionum erit, ut aa 2 ad bb u, quod erat probandum. Et ita in omnibus poligonijs pariformiter procedi poterit, sicut in tetragono. Ex hoc constat propositum.



r q ſemidiameter circuli.
r s medietas a b, ſeu circumferentiæ circuli.
r q t s quadrangulum æquale circulo.
s x æquale r q.
y medium inter r & x, & centrum circuli r y x.
s u medium proportionale inter r s & s x. Ex nona ſexti.
s u z 2 quadratum æquale circulo, cuius ſemidiameter r q.

Adhuc aliter. Capacitas circuli ſuper capacitatem trigoni eſt maxima, & differentia ſemidiametrorum circulorum inſcripti & circumſcripti eſt nulla ſeu minima ſimpliciter, quia minor eſſe nequit, ſed differentia ſemidiametrorum circuloꝝ inſcripti & circumſcripti trigono eſt maxima, capacitas uero eius ſuper ſuiipſius capacitatem eſt nulla uel minima ſimpliciter. Eſto igitur quòd aliqua linea ſit ut differentia ſemidiametrorum in trigono, & etiam ſit ut capacitas circuli ſuper trigonum, quæ ſit a b linea, quadretur igitur illa, & ſit quadratum a b c d, & ſit a b ut differentia ſemidiametrorum cum illa minima capacitate trigoni ſuper ſui ipſius capacitatem, & c d capacitas circuli ſuper trigonum cum illa minima differentia ſemidiametrorum talium, & trahatur linea diametralis b c. Dico in omnibus poligonijs mediis inter trigonum & circulum lineas capacitatis ſuper capacitatẽ trigoni cũ differentia ſemidiametrorũ non poſſe eſſe maiores nec minores a b aut c d, ut de ſe patet. Eſto igitur, quòd trahatur e f linea æqualis & æque diſtans ad a b & c d, & illa ſecetur per b c in puncto g, & ſit g e ut differentia ſemidiametrorum talium in tetragono. manifeſtum eſt, q̃ g f erit ut capacitas tetragoni ſuper trigonum. Erit igitur habitudo capacitatis tetragoni ſuper capacitatem trigoni ad capacitatem circuli ſuper capacitatẽ trigoni, ut g f ad c d. Signatur igiſ in f g additio ſemidiametri inſcripti tetragono ſuper ſemidiametrũ iſcripti trigono, & ſit f h, & trahaſ de b per h ad c d linea, & cõtactus ſit 1. Dico q̃ d 1 eſt additio ſemidiametri circuli iſſoperimetri ſup ſemidiametrũ inſcripti trigono. Quæ eñ eſt habitudo f g ad d c, illa f h ad d 1, ſed diuerſitas capacitatis in iſſopleuris & iſſoperimetris ſup capacitatẽ trigoni nõ euenit niſi ex diuerſa additione ſemidiametroꝝ circuloꝝ inſcriptoꝝ ſup ſemidiametrum inſcripti trigono. Quæ igiſ eſt habitudo capacitatũ ſup trigonũ, illa eſt additionũ ſemidiametroꝝ inſcriptoꝝ ſup ſemidiametrũ circuli inſcripti trigono, Per hoc patet quæſitum.



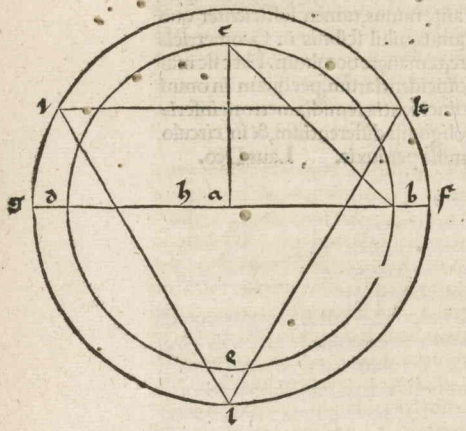
Eiuſdẽ

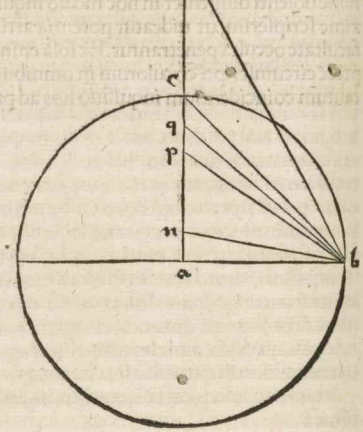
EX his nunc circa cordas & arcus scientia perfecta elici poterit. Nam si una est habitudo eius quod addit semidiameter inscripti polygoniæ isſopleuræ & isſoperimetræ post trigonum super semidiametrum inscripti trigono ad id, quod addit semidiameter circūscripti trigono super semidiametrum circumscripti illi polygoniæ: & si illæ additiones unà cum differentia seu sagitta simul iunctæ æquiualent sagittæ lateris trigoni, ut ex præmiſſis clare constat, tunc scita habitudine talium additionum, quæ tamen numero nō attingitur, sicut nec medietas duplæ, ars est reperta ad omne scibile in cordis & arcubus. Quæ autem sit habitudo additionum sic in propinquis numeris inuestigatur. Esto q semidiameter circuli trigono circumscripti sit 14. erit semidiameter inscripti 7. cuius quadratū 49. & quadratum semilateris trigoni ter tantum, scilicet 147. & quadratū semidiametri circumscripti quater tantū, scilicet 196. erit igitur semilatus tetragoni radix $\frac{9}{10}$. & quadrati semilateris trigoni scilicet radix de 82 cum $\frac{11}{10}$. & talis erit semidiameter inscripti. Erit autem semidiameter circumscripti radix dupli numeri scilicet 165 cum $\frac{6}{10}$. Subtracta igitur radice de 49. à radice de 82 & $\frac{11}{10}$. differētia est additio semidiametri inscripti tetragono isſp semidiametrū inscripti trigonio, quæ erit aliquid plus q̄ duo, & subtracta radice de 165 cum $\frac{6}{10}$ à radice de 196. quæ erit parum plus quàm unū. Habes additiones, & earū habitudo est illa, per quam omnia inuestigantur. Nam si has additiones subtraxeris à sagitta lateris trigoni, scilicet 7. remanet sagitta tetragoni. Si igitur diuiseris 7 secundum præfatam additionum habitudinem, & maiorem addideris super semidiametrum inscripti trigono, habes semidiametrum circuli isſoperimetri. Poteris etiam ex quadrato lateris trigoni aut quadrati scire sic quadratum lateris cuiuslibet polygoniæ dabilis: & ex eius scientia & habitudine additionum deuenitur ad sagittā & semidiametrum inscripti, & sic scitur corda. Et hæc est perfectio ultima Geometricæ artis, ad quam hactenus ueteres non legimus deuenisse. Est etiam nunc ars completa Geometricarum transmutationum, quam antę minus, tamen sufficienter quo ad quadraturam circuli descripsimus. Et putamus, nihil scibilis in Geometricis nunc uolenti diligenter in hoc medio inquirere, remanere occultum. Hæc sic maxime scripserim, ut uideatur potentia artis coincidentiarum, per quam in omni facultate occulta penetrantur. Ex sola enim coincidentia semidiametrorū inscripti & circumscripti circulorum in omnibus polygonijs differentium, & in circulo tantum coincidentium inquisitio nos ad præmiſſa perduxit. Laus Deo.

Dialogus inter Cardinalem sancti Petri, episcopũ Brixinensem, & Paulum physicũ Florentinum, de circuli quadratura.

PAVLVS.

PAter optime, quia me nosti à puero ueritatem quæsiuisse, quæ in Mathematicis clarius uidetur relucere, atq; quantum cupiam hactenus ignotam circuli quadraturã. Si igitur post mihi missos tuos de Mathematicis complementis, utiq; mihi obscuros atq; incertos libellos alius certior modus incidit, rogo communices. NICOLAVS CARD. Imò facilis, & ut puto certus. PAV. Dicito quæso. NI. Omnia tibi nota scio, quæ ad rem pertinent, solum hoc unico dempto, scilicet ut datæ circumferentiæ circuli scias rectam lineã ei æqualem assignare. PAV. Ita est, nam mihi ex Archimede notum est, si semidiametrum circuli duxero in lineam æqualem semicircumferentiæ, oriri quadrangulum circulo æqualem. NI. Vt igitur tibi pandam conceptũ circa id quod restat accipe propositionem. Si corda quadrantis dati circuli fuerit addita semidiametro, eiusdem oritur diameter circuli circũscripti trigono isoperimetro circũferentiæ dati circuli. Puta sit datus circulus super a descriptus b c d e, & b c quadrans tracta corda b c, & lineis a b & a c, & sit alius circulus super eodem a centro descriptus, cuius diameter f g sit ut a b & b c, scilicet g h ut b a, & h f ut b c, & inscribatur trigonus i k l. dico illum trigonum rectilineum æquari circumferentiæ curuæ b c d e. PAV. Facilis est hæc praxis atq; carissima, si hoc uerum ostenderis. NI. Conabor seruata descriptione dati circuli, lineam a c continuabo in infinitum, quæ sit m a, dico non dubium de b ad a m lineam, aliquam posse lineam duci, quæ sic se habet, ꝙ si ei additur alia linea, quæ se habeat ad ipsam sicut cõsta ad diametrũ quadrati, exsurget linea æqualis diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro dati





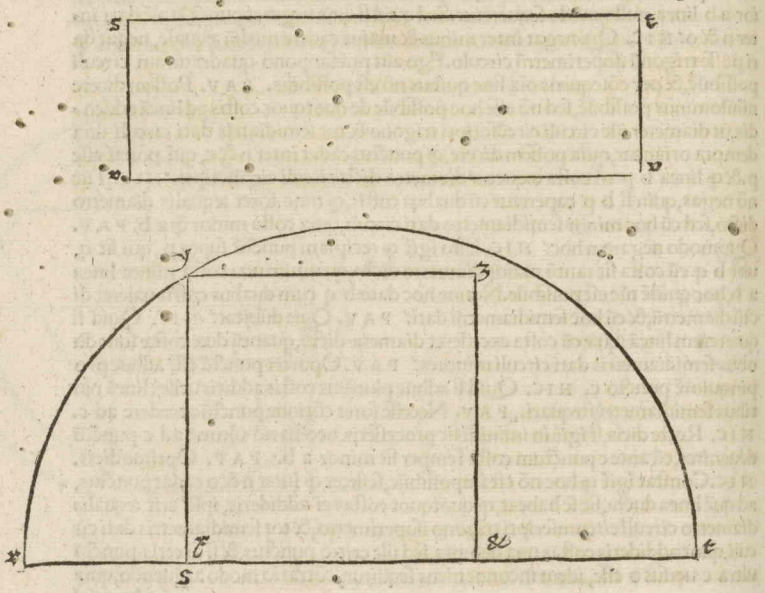
dati circuli. PAV. Admitto,nam potest dari línea sic de b ad a m tracta, cui si additur alia habens se ad ipsam ut costa ad diametrum,oritur línea minor díame tro circuli circũscripti trigono ísoperímetro dati circuli,ut si trahitur ad punctũ prope a,quæ ponatur esse n.& sic potest dari alia,quæ ad punctum prope m pun cto o trahatur,quæ cũ costa sit maior;igitur inter n & o erit punctus, ad quem si trahitur línea de b.illa cum costa erit æqualis,nec maior scílicet,nec minor dia- metro circuli circũscripti trigono ísoperímetro dati circuli. NIC. Bene dico igi tur,ꝙ sicut si acceperis b n cũ quotquot uoluerís costís suis, línea quæ oritur erit minor diametro circuli circũscripti trígono,& tot semidiametrís dati circuli, ꝙ costas addideris una costa dempta,& si acceperis b o, cũ tot costís suis sicut uolu erís,exurget línea maior semidiametro circuli circũscripti trígono,& tot semidia metris dati circuli,quot costas addideris una dempta. Igitur etiam erit punctus in ter n & o. ad quem si de b líneam traxeris,sic se habebit,ꝙ ipsa erit æqualis dia- metro circuli circũscripti trígono,& tot semidiametris dati circuli,quot costas ad dideris,una dempta: hoc aũt nõ est possíbile nísi in puncto c.cuius costa est ut se- midiameter dati circuli,scílicet ut b a, aliàs si costa foret maior aut minor ꝙ b a, nõ erit hoc possíbile. PAV. Fateor primũ,scílicet ꝙ b n cũ tot costís,sicut placu erit,sumptís,maneat minor díametro circuli circũscripti trígono ísoperímetro,& tot semidiametris dati circuli una dempta,intelligo una dempta : quía unã costã iungís líneæ b n pro diametro circuli circũscripti,patet,nã cũ b n costa sit minor ꝙ illa diametri,& costa sit minor ꝙ a b, patet totũ. Sic contrario modo se habet línea b o,& etiã patet: est etiã certũ,si sic debet fieri,quo ad æqualitatem in alíquo medio puncto,ꝙ ille sit c,ob rationẽ quã dixísti. Si enĩ costa foret minor aut ma- ior a b línea,nullo mõdo sequeretur. Sed quid si quis negaret punctũ talẽ dari in- ter n & o? NIC. Qui negat inter minus & maius cadere mediũ æquale, negat da rí posse trigonũ ísoperímetrũ círculo. Ego aũt præsuppono quadraturam circuli possíbilẽ,& per cõsequens oía sine quíbus nõ est possíbilis. PAV. Possem dícere nihilominus possíbilẽ,sed nõ esse hoc possíbile de quotquot costís ad líneã adden- dís,ut díameter ille circuli circũscripti trígono & tot semidiatris dati circuli una dempta oriantur,quía possem dícere,ꝙ punctus cadat inter n & c, qui ponat esse p.& ꝙ línea b p cũ costa æquetur díametro dicti circuli circũscripti. NIC. Tũc nõ negas,quin si b p caperetur cũ duabus costís,ꝙ tunc foret æqualis díametro dicto,sed cũ hoc minor semidiametro dati circuli,quia costa minor ꝙ a b. PAV. Quomodo negarem hoc? NIC. Esto igit ꝙ recipiam punctũ super p, qui sit q, ubi b q cũ costa sit tantũ maior díametro dicto,quantum una costa minor línea a b,hoc quidẽ tũc est possíbile. Nonne hoc dato b q cum duabus costís ualeret di ctũ díametrũ,& cũ hoc semidiametrũ dati? PAV. Quis dubitat? NIC. Quid si quærerem líneã ,quæ cũ costa excederet diametr dictũ,quantũ duæ costæ sunt du obus semidiametris dati circuli minores? PAV. Oportet punctũ esse adhuc pro pinquiorẽ puncto c. NIC. Quid si adhuc pluríbus costís additis uelles líneã plu ríbus semidiametris æquari. PAV. Necesse foret cõtinue punctũ accedere ad c. NIC. Recte dicis,si igit in infinitũ sic processerís,necessario ultimo ad c punctũ deuenires,cũ ante c punctum costa semper sit minor a b. PAV. Optime dicis. NIC. Constat igit ꝙ hoc nõ est impossíbile,scílicet ꝙ inter n & o cadat punctus, ad quẽ línea ducta,sic se habeat,ꝙ quotquot costas ei addideris, ipsa erit æqualis díametro círculi circumscripti trígono ísoperímetro,& tot semidiametris dati cir culi,quot addideris costas una dempta,sed ille erit c punctus,& si dixeris punctũ ultra c uersus o esse, idem inconueniens sequitur, cõtrario modo arguendo,quía

deuenieẽ

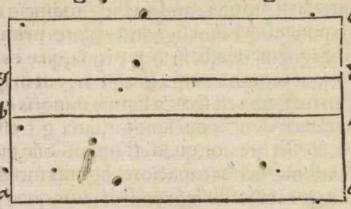
deuenietur necessario iterũ ad c punctum. PAV. Non possum negare quin ita sit, ut clare ostendisti, manifestè enĩ constat, ꝙ qui punctũ citra uel ultra c dixerit esse, ille errat, & error conuincit ex ipsius positione. quoniã oĩs linea maior b c cũ costa sua est maior diametro circuli circũscripti trigono isoperimetro, & minor cũ costa est minor diametro. NIC. Posset adhuc alia uia idipsum ostendi, & plures modi sunt diametros circulorũ inscriptorũ & circumscriptorũ polygonis isoperimetris datis circulis facilitèr reperiẽdi ex scientia, ꝙ capacissima polygonia infinitorũ laterũ coincidit cũ circulo, sed sufficit iste modus, reliquũ ad te remitto. PA. Satis est scire modũ curuã circumferentiã in rectam lineã transmutandi, & econuerso rectã in curuã. ex quo oĩa, quæ hactenus in mathematicis ignorabãtur, possunt elici, prout in mathematicis tuis tetigisti cõplementis. Qui igitur reduxerit curuã in rectã, ducat semidiametrum dati circuli in semirectã æqualẽ circũferentiæ, puta sit r s ut a b, & s t ut medietas trium lineaꝝ i k l, concludendo quadrangulũ r s t u, qui erit ut area circuli b c d e, reperiat mediũ ꝓportionale inter r s & s t per nonam sexti Euclidis, & sit x y medium proportionale scilicet costa quadrati, & erit x y z & quadratũ æquale circulo. Ista nota sunt, & ideo tibi Nicolao patri optimo gratias ago, quòd tot tuis curis nõ obstantibus dignatus es tuũ ingeniũ ad hãc rem ab oĩbus doctis in Mathematicis desideratã, & nõ repertã applicare, & post multos labores & uarios modos facilimã atq; clarissimam inuentionẽ tuã propalare, & inquisitores â fatiga magna releuare.

Finis. Brixinæ. 1457.

Capacitates

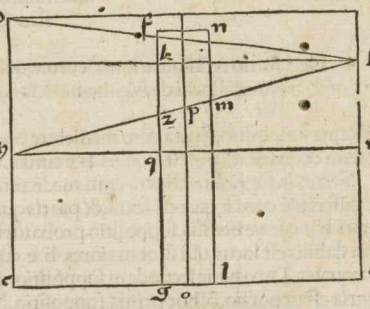


CApacitates omnium poligoniarum iſſoperimetrarum adinuicem & ad circulum iſſoperimetrum eandem proportionẽ habent, quam primæ lineæ unius ad primas lineas alterius, & ad ſemidiametrum iſſoperimetrum. Similiter exceſſus capacitatis aliarũ à triangulo ſupra triangulum in eandem proportionem ſe habent ad capacitatem trianguli, quam habent exceſſus primarum linearũ aliarum figurarum à triangulo ad primam trianguli lineam. Verbi gratia.



Sit prima trianguli a b prima alterius figuræ mediæ, ut quadrati c d prima circuli ſiue ſemidiametri c e, ſit a c ſemicircumferentia oĩm iſtarum ſuperficierum, quoniam ſunt iſſoperimetræ, erit ſuperficies a e capacitas circuli, ſuperficies a d capacitas figuræ mediæ ut quadrati, ſuperficies a f capacitas trianguli. Dico primo, q̃ qualis eſt proportio ſuperficiei a e ad a d ſuperficiem, talis eſt c e lineæ ad e d lineam, & qualis proportio eſt a d ſuperficiei ad a f ſuperficiẽ, talis eſt c d lineæ ad c f lineam. per primã enim ſexti Euclidis dictæ ſuperficies ſunt eiuſdem altitudinis, ergo ſuis baſibus ſunt proportionales. Eodem modo probatur de exceſſibus capacitatũ, quia eædem ſunt proportiones de ſuperficiebus g e & b d ad lineas e d & d f, uel de ſuperficiebus b e & b d, qui ſunt exceſſus capacitatum circuli & quadrati ſupra triangulum ad lineas f e & f d, qui ſunt exceſſus primarum linearum circuli & quadrati ſupra primam trianguli. hæc clara ſunt ex eadem prima Sexti Euclidis. Quicquid ergo de capacitatibus corporum dicitur, & capacitatibus exceſſuum de ipſis primis lineis, dici poteſt & de eorum exceſſibus.

Si a ſecunda extremitate primæ circuli ad ſecundam trianguli linea recta ducatur æquediſtanter baſi in ea proportione, qua diuidet exceſſum ſecundæ ſupra primam ipſius trianguli, in eadem proportione diuidet exceſſus ſecundarũ à primis omnium aliarum figurarum mediarũ. Sit ſupra extremitatem lineæ a c recta linea a b, quæ ſit prima circuli, & ſuper alia extremitate dictæ lineæ a c, ſit erecta linea c d, quæ ſit ſecunda trianguli, quia linea a b eſt minor linea c d, ſi à puncto b trahatur linea b e æquediſtans baſi a c, perueniet in linea c d, & diuidet exceſſum ſecundæ à prima, qui eſt h d in quadam proportione d e ad e h. Dico q̃ ſi prima & ſecunda alicuius figuræ mediæ deſcribatur, ut g i prima, & g f ſecunda, q̃ exceſſus ſecundæ à prima, qui eſt f i diuident ab ipſa b e linea in puncto k, in eadẽ proportione quæ erit f k ad k i ductis lineis d b h b. ita q̃ erit eadem proportio f k ad k i, quæ d e ad e h, totus enim triangulus d h b diuiſus eſt per æquediſtantem baſi f i, erit ergo proportio e b ad k b, ſicut d h ad f i, & eadem proportio erit d e ad k f, & e h



b ad k

a d k i propter similitudinem triangulorꝝ, sicut e b ad k b: Sicut ergo d e ad f k, ita e h ad k i, permutatim ergo sicut d e ad e h, ita f k ad k i, ergo illi excessus proportionabiliter sunt diuisi, quod fuit probandū. Forte dicitur, ꝙ si g f est secunda unius figuræ mediæ, quòd g i non erit prima. Erit ergo prima eiusdem figuræ aut maior g i aut minor. sit primo maior, & sit l m, quā extendo sursum usq; ad n, ita quod l n sit æqualis g f, & traho lineam f n æquedistanter. basi propter eandem longitudinem duarum linearū g f, & l n. Inter duo ergo puncta g l sunt signandæ plures primæ & secundæ lineæ figurarum mediarum. Signetur una, & sit o p prima, quæ extendatur usq; ad secundam eiusdē figuræ, aut proueniet infra lineā f n, aut in ipsa linea, aut supra. Non infra ipsam, nec in ipsa, quia est secūda figuræ minoris capacitatis, ergo deberet esse longior, non tamen potest poni longior, quia g f est posita inter figuras minoris capacitatis, & esset breuior, quod est impossibile, quia non diminuendo procederent secundæ lineæ uersus capaciores figuras incedendo, quod est impossibile. Eodē modo dicetur impossibile sequi, si dicatur, quòd prima eius erit minor g i. Cum ergo nec maior nec minor dici potest, ipsa g i erit prima, quia omnes excessus secundarum à primis in eadem proportione diuidentur, quod fuit probandum.

Hæc uidetur declaratio undecimæ conclusionis uestræ, in qua pendet tota demonstratio quadraturæ. Nam qualis est proportio h q ad q i, talis est h r ad r b. Istarum autem quatuor linearum proportionaliū tres primæ sunt notæ, h q prima, quia subtractio sagittæ quadrati uel alterius mediæ à sagitta trigoni q i. Secunda est etiā nota, quia excessus primæ tetragoni à prima trigoni. Tertia etiā est nota, h r, quia sagitta trigoni. Si ergo multiplices h r in q i, & diuidas per h q, habetur r b nota, quæ adiuncta primæ trigoni r a erit a b nota prima circuli siue semidiameter, quod intenditur. Sed non uideo cur duæ lineæ h b & b d concludentes omnes illos excessus primarum & secundarum, non possent esse curuæ omni genere curuitatis, & tunc non procederet demonstratio: erit em illud quod in decima tua conclusione dixisti, ꝙ primæ capaciorꝝ erūt semper maiores, & secundæ minores: hæc uolo mihi in præsenti sufficiāt. Multa habeo, quæ me mouent, quòd istæ coincidentiæ siue intensiones & remissiones formarum nō per lineas rectas signari debeant, ut moderni ponunt, sed in aliud tempus reseruo. Vale.

Detur uenerabili nostro fideli dilecto magistro Georgio Peurbachio Astronomo.

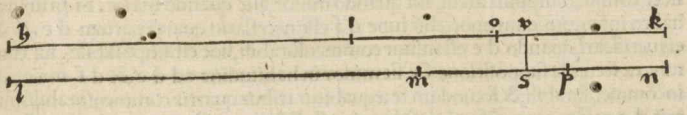
Declaratio rectilineationis curuæ, quæ ponitur in primo modo secundi libelli de Mathematicis complementis.

PRima suppositio. Sexta cum medietate portionis quintæ, quæ cadit inter curuam & quadratā potest æquari b e curuæ. Hæc suppositio certa est ut in litera. Secunda suppositio. Sexta cum medietate portionis, & quinta cum medietate differētiæ cordæ, quæ est sexta, & partis quintæ, quæ etiam est corda, possunt æquari b e curuæ bis. Illa suppositio probatur uti præmissa in textu probantur. Nam dabilis est locus, ubi sunt maiores b e curua bis, & ubi minores, & ideo & ubi æquales. Dico hanc secundam suppositionem non habere locum, nisi ubi differentia est ut portio, & hoc prima suppositio. Nam si dixeris in secunda suppositione, differentiam maiore portione, erit igitur quinta minor sexta, quæ est sextæ æqualis, quādo differentia cordarū sicut portio quintæ, & minor si differentia maior, & maior si differentia minor, ut de se patet. Esto igitur, ꝙ ad sextam addatur

tota

tota portio, & ad quintam tota differentia, tunc erunt æquales, & quælibet maioris b e curua. Si igitur subtrahitur æquale, ut quælibet sit sicut b e curua, tunc necesse est q̃ de sexta cum portione subtrahat̃, plusquã medietas portionis, cum portio ponatur minor differentia, & oportet q̃ de differentia subtrahat̃ minus q̃ medietas, & tantum minus eius medietate quantum prius plus medietate portionis, ut simul maneat medietas portionis & medietas differentiæ, quæ additæ sextæ & quintæ, efficiant b e curuam bis, ut de se patet. Sexta igitur cum medietate portionis erit tunc maior b e curua, non erit igitur sexta cum medietate portionis æqualis b e curuæ differentia portionẽ excedente. Puta tu dicis, q̃ b g quinta cum medietate differentiæ f e sextæ, & b g cordæ quintæ, & e f sexta cum medietate f g portionis simul æquentur b e curuæ bis, & dicis differentiam f e & f b maiorẽ f g portione. Sit igit̃ linea h i ut quinta b g, cui addatur differẽtia quæ sit ut i k. Sit alia linea sub dicta descripta l m ut sexta f e, cui addatur portio f g & sit m n ut f g, linea h k est ut linea l n, signetur medietas differentiæ quæ sit i o, & medietas portionis quæ sit m p, cadat orthogonaliter inter p & o, quæ sit r s. Quanto igitur m s est minus medietate portionis quæ est m p, tanto i r maior medietate differentiæ quæ est i o, erit igitur l s æqualis b e curuæ, sic sexta l m cum medietate portionis est maior b e curua, ubi ergo sexta cũ medietate portionis debet esse æqualis b e curuæ, medietas differentiæ non erit maior medietate portionis. Sic si dixeris differentiã minorẽ portione, sequit̃ sextã cũ medietate portionis minorem b e curua, oportet igitur, si sexta cum medietate portionis debet esse æqualis b e curuæ, quod differentia sextæ & cordæ quintæ nõ sit maior ac minor portione, quo casu probat primum præsuppositũ secundum, scilicet quintã cum medietate differentiæ, & sextam cũ medietate portionis, tunc æquari b e curuæ bis, quando differentia fuerit ut portio, & hoc est, quando quinta est ut sexta, & hoc est intentum. Ecce mirabilem modum ostensionis, quoniam siue dixeris differentiam æquari portioni in secũda suppositione, siue non æquari, sequitur in prima suppositione differentiam æquari portioni, & per consequens & in secunda suppositione, & est quædam coincidentia oppositorum, quoniam per hoc q̃ dicis differentiã non æquari portioni, sequitur, q̃ æquetur, & falsum interimit seipsum.

b 2



DE VNA RECTI CVRVIQVE MENSVRA.

Nicolaus Cardinalis S. Petri.

QVia uidi practicum magisterium commensurationis curui & recti deesse Geometricis, ideo ipsos imperfectos, & plura quæ possibilia fieri uident, ad actum deducere non posse, conatum igitur non paruum adhibui, ut ipsam artem assequerer, quam si reperi, tu qui hæc leges, iudicabis.

Commensurari autem curuum & rectum dico, quando una mensura mensurantur, puta quando recta linea tot pedes habet rectos, quot arcus curuos.

Propositio prima.

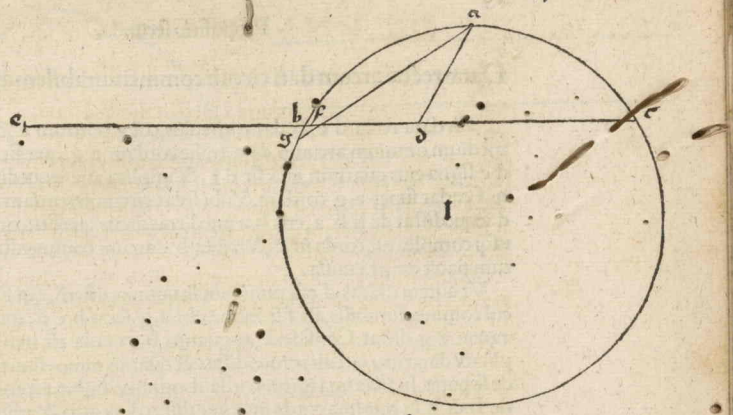
Dato arcu, rectam ei commensurabilem assignare.

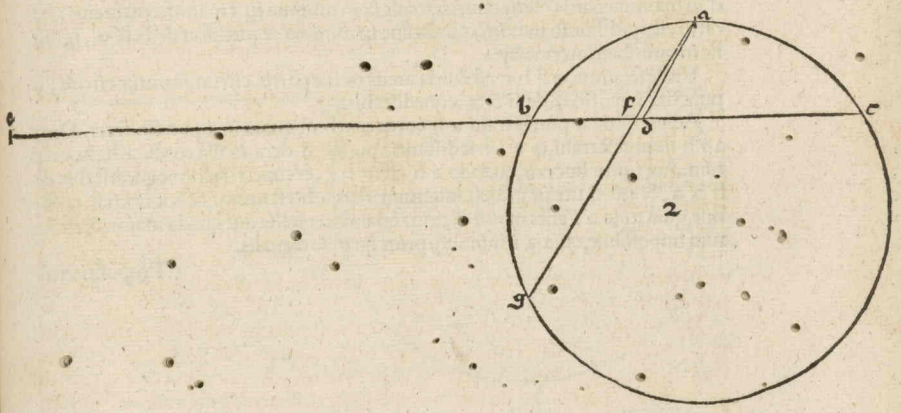
Sit b c datus arcus, cuius a medium, & trahatur corda b c, & in illa punctus æquedistans de a & b qui sit d, & hic est punctus huius magisterij, de illo igitur per b continua rectam, quæ sit d e talitef, ꝙ si de a cordam a g, quæ sit ut medietas d e per d e traxeris, illa corda uadat per f punctum lineæ d e. Sit autem d f quarta pars d e, tunc d e linea recta est commensurabilis b c arcui.

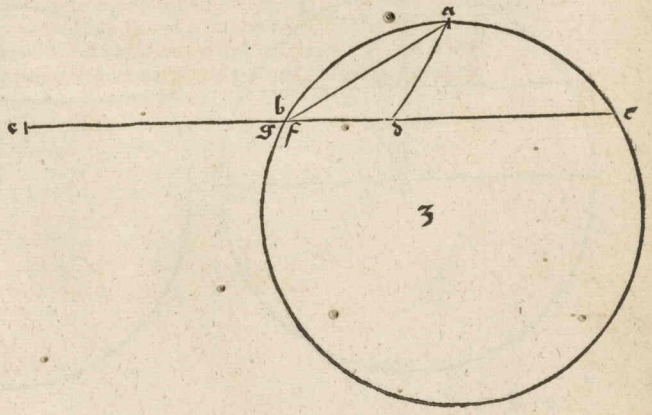
Ad hoc probandum præsuppono duo. Primo, ꝙ d e sic signari potest, ꝙ inter f punctum, per quam uadit corda, ut præfertur, & e finem lineæ d e portio æque tur tribus quartis commensurabilis recte, patet de se, nam certum est, ꝙ taliter signari potest, ꝙ f e est plus, ut in secūda figura, & etiam taliter ꝙ est minus, ut in tertia, igitur & taliter, ꝙ nec plus nec minus.

Secundo præsuppono, ꝙ quanto d e est minor, tanto f e in habitudine ad d e est minor, & d f maior, & quanto maior huius contrarium: hoc etiam per se patet ad oculum in secunda & tertia figuris.

Dico igitur primum præsuppositum uerificari, aut quando d e est quæsita, sci licet commensurabilis arcui, aut quando minor, aut quando maior. Si primum, habeo intentum, nam oportebit tunc d f esse necessario quartā partem d e. Si dicis uerificari, quando d e est minor commensurabili, hoc est impossibile, nā cum tunc ex secunda suppositione f e sit minor in habitudine ad d e, & d f maior ꝙ incommensurabili, & secundum te æquabitur tribus quartis commensurabilis, nō erit d e minor commēsurabili sed maior: sic si dicis uerificari, quando d e est maior commensurabili, similiter implicat contradictionem.


a
e
b
f
g
d
c
1


a
e
b
f
d
c
2
g


a
e
b
g
f
d
c
3

Propositio secunda.

Datæ rectæ arcum dati circuli commensurabilem assignare.

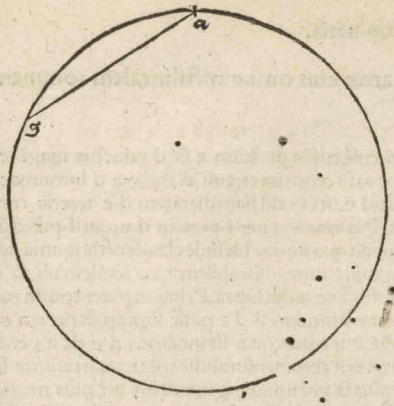
Sit data recta d e, & datus circulus, cuius centrum t, & diameter s t u, & a medium omnium arcuum, de a trahe cordam a g, quæ sit ut medietas d e, & in d e signa eius quartam, quæ sit d f, & applica d e æquedistanter ad t u, taliter ꝙ f cadat super a g cordam, & ubi secat circumferentiam circuli pone b, si tunc d æquedistat de b & a, erit b a medietas arcus quæsiti: continua igitur b d quo usq; compleatur corda in c, & habes b c arcum commensurabilem d e rectæ. totum patet ex præmissa.

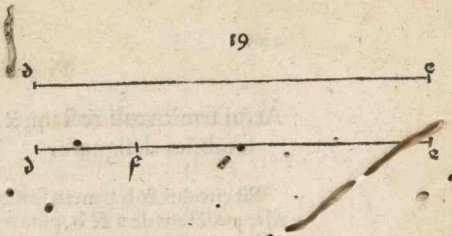
Vt autem uideas d esse punctum huius magisterij, qui si a g corda est b a arcui commensurabilis, ab f sectione, ubi a g secat b c d, ipse punctus per medietatem a g distat. Considera, ꝙ quanto b c corda est maior, tanto d de b & a plus & de centro circuli minus distat; & quanto minor huius contrarium, & hoc de se patet. In maxima igitur corda d minime distat à centro circuli, & maxime de b & a in minima corda maxime distat de centro, & minime de b & a, unde d in maxima corda est in centro circuli, & in minima in circumferentia eius, sed certū est, ꝙ d siue in maxima corda siue in minima æquedistat de b & a, igitur sic in omnibus intermedijs.

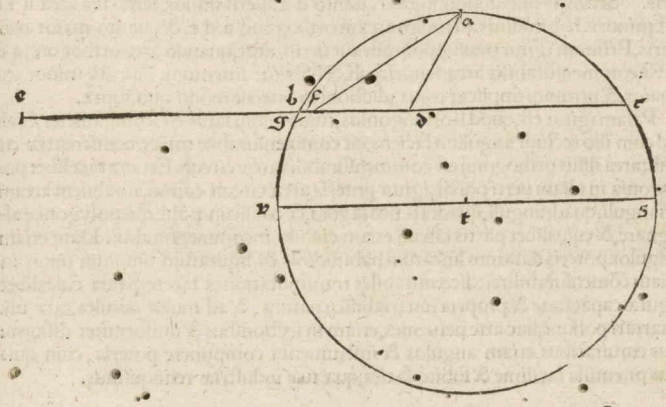
Vnde sequitur, ꝙ si b c est corda arcus tertiæ partis circumferentiæ circuli, d punctus à centro & de b & a æquedistabit.

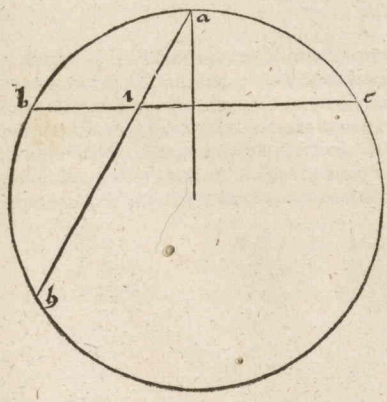
Adhuc sic de x potest trahi a h corda per b c, quam in i puncto secet. Dico a i h sic potest trahi, ꝙ a i erit distantia puncti d de a in illa corda a h, hoc certum. Aut igitur hoc erit, quando a h est ut b c, & tunc i sectio æquedistabit de b & a, & erit d utriusq;, & est intentum. Aut a h est minor, & hoc non est possibile, quia tunc a i esset maior ꝙ prius quando æqualis, aut quãdo maior, & est iterum impossibile, quia a i minor ꝙ prius quando æqualis.

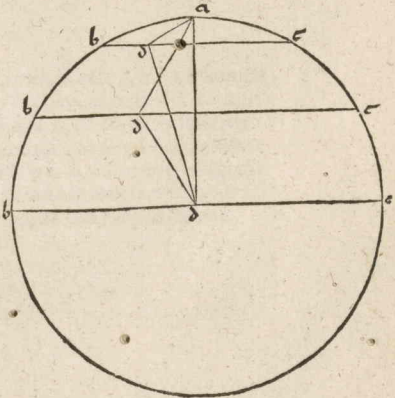
Propositio ter-


a
g


d
e
d
f
e


a
e
b
f
g
d
c
v
t
s


a
b
1
c
b

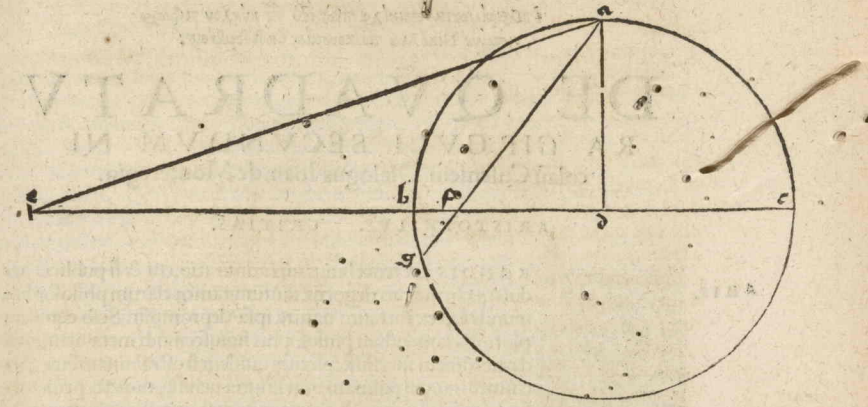

a
b
c
d
b
c
d
b
d
e

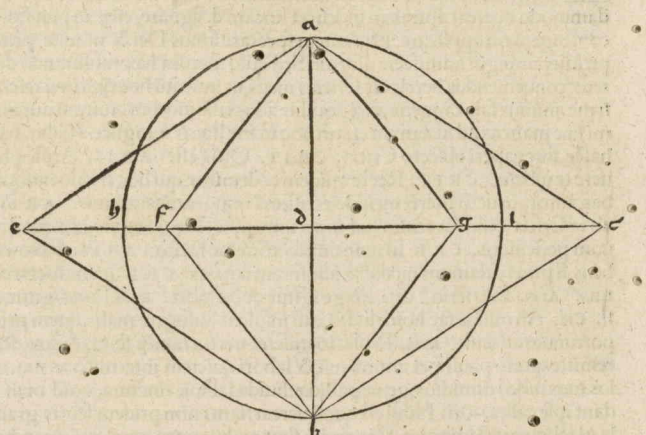
Propositio tertia.

Arcui semicirculi rectam, & areæ eius curuæ rectilinealem commensurabiles designare.

Sit circulus, & b c arcus semicirculi, cuius medium a & d punctus magistery æquedistans de a & b, puta hoc casu centrum circuli, & trahe a d lineam, deinde trahe d b in continuum, & sit d e, ita quòd si medietatem d e feceris cordam a g, quæ de a per d e trahit, ipsa transeat per f punctũ d e, qui f punctus distet de d per quartã partẽ d e modo quo supra. Deinde claude orthogoniũ per a e latus, dico aream a d e orthogonij commensurabilem areæ semicirculi, & d e commensurabilem arcui b c. Secundum patet supra. Primum patet eodem modo ut prius per duo supposita, quorum primum est d e posse signari, & per e a orthogonium claudi, taliter quòd si ducitur corda, quæ sit medietas d e de a per d e, ut sit a f g area inter a f e, cadens erit commensurabilis tribus quartis areæ semicirculi. patet, quia datur ubi est plus & ubi minus, igitur & ubi nec plus nec minus. Secundo præsuppono, quòd quanto d e fuerit minor, tanto illa area a f e est minoris habitudinis ad totam aream orthogonij a d e, & quanto maior maioris. Primum igitur præsuppositum aut uerificatur, quando area orthogonij a d e est commensurabilis areæ semicirculi, & habetur intentum. Aut ubi minor seu maior, & utrumq; implicat contradictionem præcise modo quo supra.

Palam igitur est, quòd si orthogonius, cuius unum latus est semidiameter, & aliud cum illo rectum angulum faciens, est commensurabile toti circumferentiæ circuli: area illius orthogonij est commensurabilis areæ circuli. Et quia quælibet polygonia in aliam uerti potest, igitur poteris areæ circuli commẽsurabilem aream trianguli, quadranguli, quadrati, pentagoni, & cuiuscunq; alterius polygoniæ assignare, & cuiuslibet partis circuli etiam circulo incommensurabili. Dare etiam angulos poteris datarum linearum habitudinis, & figurarum omnium unius in aliam cõmensurabiliter: dico mirabiles transmutationes facere. Saltua cuiuslibet figuræ capacitate & propria inuariabilíq; natura, & ad multa occulta, quæ uix enarrari possunt, hac arte peruenies, etiam in sectionibus & uniformiter difformibus curuitatibus, etiam angulos & instrumenta componere poteris, cum quibus præmissa facilime & subito facies, quæ tuæ industriæ relinquimus.





Area a g b f cõmenſuratur medietati areæ circuli, & area a b c e commenſuratur areæ circuli, medium proportionale inter a d ſemidiametrũ & e c rectã medietati circumferentiæ circuli commenſurabilẽ, quã nona ſexti Euclidis reperire docet, eſt coſta quadrati, cuius area cõmenſuratur circulo d f recta commenſurabilis eſt octauæ circumferentiæ circuli, ideo area a d f orthogonij commenſuratur octauæ areæ circuli. Ideo quando habes rectam arcui commenſurabilem, habes & aream rectilinealem areæ portionis circuli commenſurabilem.

FINIS.

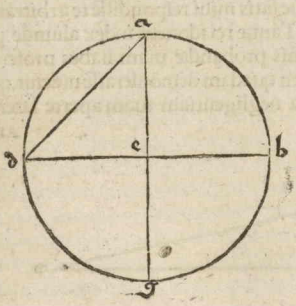
ἐπιλειρήματα ποικίλα πρὸς τοῦ τοῦ κύκλου τετραγω-
νισμοὺς Νικόλεω τῶ κουσαίω ἐκδεδομένοις.

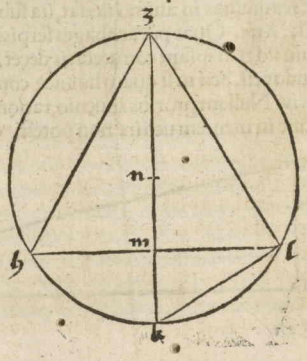
DE QVADRATV RA CIRCVLI SECVNDVM NI colaũ Cusensem, Dialogus Ioan. de Monteregio.

ARISTOPHILVS. CRITIAS.

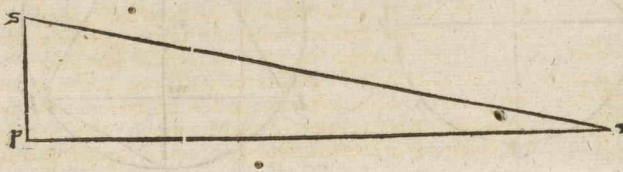
ARIS. RANDIS me tenet huius uiri admiratio, cui & si publicis ar-
duisq; circũuento negocijs, tantum tamq; clarum philosophiæ
munus suo ex thesauro natura ipsa deprompsit. Scio equidem
plurimis iamdudum philosophis huiuscemodi metæ attingen-
dæ libidinem incessisse: plerisq; quidem frustra nitentibus, Ar-
chimedi autem palmam non iniuria uenisse, tametsi principia
sua non modo non admittere cogatur animus, uerũetiam quo-
dammodo horreat: spiralem uidelicet lineam designare, eiq; in puncto quolibet
contingentem applicare. Hic autem spectatissimus Dei & naturæ præco, nihil
prorsus ambigui admiscere uidetur. Sed quid mecum hæc mussitando diem con-
tero? conueniendus hercle est Critias meus, ut inuentũ hoc q̃ primũ resciat: cui, ni
si me animus fallit, ingens auri pondus aduexisse uidebor. mirum autem si nõ do
mi suæ manens ad lucernam etiam hoc mane literis inuigilet. Adibo. hui graues
hasce fores aperi obsecro Critia. CRIT. Quis est? ARIS. Aristophilus sal-
uere te iubens. CRIT. Recte quidem te demiror, qui hoc triduo nusquã appare
bas, auroram uero literis meis delectissimã importunus adimis. ARIS. Haud
ab re Critia mihi succenses, habituro tamen, sic spero, ueniam, ubi quod porto no
uum persenseris. CRI. Id noui amico cõmune facito. ARIS. Faxo equidẽ li-
bens, si prius calamum medullæ tuæ furem reijcias. CRI. Ita ne iocis cedendum
tuis? Aris. Imò serio. Cri. Perge igitur quod lubet. Aris. Pone igitur quod ius
si. Cri. Ah missos fac hosce ludos, nisi insolens aufugere malis, quem pridem im
portunum admisi. Aris. Profecto miseret me tui nunq̃ se macerare desinentis.
remitte quæso paulisper animũ tuũ, & labori quietem intermisceas tuo. uix ocu-
los tuos uideo dimidios: genæ pallidæ: liuida labiorũ tinctura, quid mali porten-
dant ipse calles. Cri. Nihil est quod uerear: iam enim pridem febris grandiuscu-
la id reliquit uestigiorum. Verum ita sunt res humanæ, ut quæ tibi conducant, ali
us quispiam q̃ ipsemet certius iudicarit. auscultandum tibi censeo Aristophile.
Aris. Nobile cunctis iamdudũ philosophis natura exposuit brauium, cuius obti
nendi gratia plerosq; Græcos clarissimos egregie cucurrisse atq; concertasse aiũt.
Cri. Quas mihi nebulas affers? Aris. Archimedem in ea re cæteros superasse fa
ma est. Cri. Pergin perplexe loqui? Aris. Ambitum circuli dirigere, areamq; su
am quadrare perpaucis hactenus libuit. Cri. Imò nemini conanti etiam iter pa-
teret, nisi Siculus ille Geometrarũ flos inuenta sua literis mandasset. Aris. Aliũ
tibi dabo qui lucide breuiterq; lineæ circulari æqualem rectam dare pollicetur, un
de & circulum ipsum quadrare haud arduum uidebitur. Cri. Hippocratem forsi-
tan quem per lunulas id assequi conatum defecisse clamant, ubi lunulæ exagonæ
æqualem triangulum rectilineum datum iri tanq̃ certum pridem & firmatum as
sumit,

sumit, nõ enim nisi lunulæ tetragonæ æquum trigonum rectilíneum designauit.
Aris. Non Chium illum, sed moderniorem uirum præstantissimum. Cri. Græcum an Latinum? Aris. Latinum. Cri. Perplacet si Græca rerum inuenienda rum facilitas Latino cuipiam accesserit, ut quamuis uiri, proh fortunæ inuidiam, incertis hac nostra tempestate uagentur sedibus, bonarum tamen artium sugestum simulacra animus quisquam possideat egregius. Sed tantæ rei inuentorem nosse uelim. Aris. Vidistin opus quoddam de docta ignorantia? Cri. Vidi. Aris. Alius autem de staticis experimentis libellus tibi unq; obiectus est? Cri. Eccum ipsum. Aris. Qui hunc & alia insuper clarissima edidit opera digito monstraretur, si Romæ una essemus. Cri. Quàm iuuat hominem uidere. Aris. Principem appelles Christianæ religionis: rubro etenim galero tegitur, summoq; Pontifici frater habetur dignissimus. Cri. Etsi uirum hunc uidere nunq; licuerit, tanta tamen, tamq; insignia monimenta sua facile mihi persuasere, ut quidquid philosophus ille asseruerit, à ueritate alienum esse non possit. sola enim autoritate sua fides extemplo nascitur. Sed quonam pacto rem illam tradiderit, Aristophile doceri percupio. Aris. Si benignas aures orationi cuidæ, quam Geometra uitare nequit, accõmodes, planè dabo sententiam eius. Cri. Ha bone uir, quasi uenusta ti magis cẽ ueritati studendũ sit: quin uocabulis peregrinis, aut characteribus quibusuis utaris licet, modo quod uerum est afferas. Aris. Ita intelliges. hanc cõclusionem uir ille affirmat. Si ex semidiametro circuli dati, atq; corda quadrantis eius directe coniunctis, diametrum alterí circulo constituerís: triangulus æquilaterus eidem inscriptus circulo dato isoperimeter habebitur. Cri. Teneo quod asseris. Verum ut Geometris mos est, figurationem instituto tuo accõmodandam censeo, quo res ipsa cognitu fiat facilior. Aris. Oportune mones. Pingo igitur circulum a b g d, cuius duæ diametri a g & b d ad rectos angulos se secent in e centro circuli, ducta corda quadrantis a d, alius demum circulus z h l suq; centro n descriptus, diametrũ habeat z k æqualem duabus lineis, e d uidelicet semidiametro circuli dati & a d cordæ quadrantis, pariter iunctis. inscribatur denicq; huic secundo circulo triangulus æquilaterus z h l. Cri. Quid tum postea? Aris. Triangulum z h l inquit ille isoperimetrũ esse circulo a b g d. Cri. Tres ergo lineas rectas z h, h l & l z ambitum circuli a b g d æquare affirmat.
Aris. Rem tenes. Cri. O memoratu dignam conclusionẽ. quæ si uerum prædicat, uetus iamdudum inimicitia circuli & figurarũ rectilinearum prorsus abolebitur.





tur, circulus enim posthac in figuram rectilíneam quamlíbet ac uice uersa spaciũ rectilíneum in circulum facile transmutabitur, quod in figuris tuis Aristophile supra definitis intueri licebit. Corda enim quadrantis a d semidiametrũ e d potentialiter duplans ex penultíma primi elementorum Euclidis principis nostri data erit, extracq; igitur rectarum e d & a d unde & z k æqualis eisdem data ueniet, cumq; ipsa z k diameter circuli z h k l potentialiter sesquitertia sit ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti. Aris. Hem quam turbam mihi ingeris, ubi dicis z k diametrum potentialiter esse sesquitertiã lateri trianguli z h l? Cri. Scies quid uelim. Potentiam líneæ rectæ quadratũ suum uocant Geometræ. Aris. Id me non fugit, uerum quadratis línearum z k & z l proportionem esse sesquitertiam ostendas quæso. Cri. Duc igitur in circulo tuo maiori cordam k l. Aris. Factum. Cri. Ea habebitur latus exagoni æquilateri circulo z h k l inscriptibilis. Aris. Confiteor, quandoquidẽ arcus k l est sexta pars de ambitu circuli huius. Cri. Dimidiam insuper circuli æquabit diametrũ, nisi decimũquintum quarti elementorum theorema mentiatur, quadratum ergo z k diametri ex quarta secundi quadrato k l quadruplũ accipietur. Angulus autem rectus z l k duo quadrata cordarum z l & l k ipsi quadrato z k æquipollere iubet. Vnde & ipsa quadratum k l quadruplabunt: quadratumq; k l tertiam partem esse quadrati z l nemo inficias ibit. Congeries itaq; duorum quadratorũ z l & l k, cui æquipollet quadratum diametri z k super quadratum z l, addit eius tertiã partem. Duo igitur quadrata z k uidelicet diametri, & z l lateris trianguli proportionẽ habebunt sesquitertiã. Aris. Iam satis est, ostendisti etenim ipsam z k diametrum lateri z l potentia sesquitertiam fore, perge quod cœpisti. Cri. Datam ergo accipiemus cordam z l, ideoq; cõgeries trium laterũ trianguli z h l æqui lateri dabitur, cui æqualem rectam p r designare licebit, quæ & ambitum circuli a b g d si uerum præ se fert conclusio æquabit. Qd' si ex termino p eiusdem rectam p s erexeris æqualem semidiametro e d circuli dati claudendo triangulũ s p r: ille triangulus circulo a b g æquabitur, qu-madmodũ in libello mesurationis circuli demonstrauit Archimedes. Ex ultima autẽ secũdi elementorũ triangulo s p r æquale quadratum describere didicisti, quod & circulo a b g d nimirũ æquabitur. Aris. Recte procedit ratio tua. Sed de conclusione supra memorata, quæ caput huius rei uidetur, quid sentis? ueram ne accipis, an non? Cri. Auctoritas uiri magna est. Aris. Quid ni? Cri. Fama præclara. Aris. Etiam. Cri. Nihil neq; sapientiæ neq; bonarum artium reliquit intentatum. Verum ut profunde res diuinas in animo uersat, ita subtiliter omne genus philosophiæ perlustrauit. Aris. Quas per arnbages serpis? Siccine satis mihi respondisse te arbitraris? quin ad rem ipsam conuertaris decet. Cri. Tantæ rei idoneus iudex aliunde petendus est. Sed tu si quam huiusce conclusionis probandæ uiam habes proferto. Aris. Nullam prorsus inuenio, ratione tamen quadam demonstrasse uidetur, quæ nunc in mentem uenire non potest. Cri. Ita negligentiam tuam aperte fateris? Aris.



Aris. Siue negligentiam siue inscitiam dicere mauis nihil mea refert, hoc unum scias Critia, syllogismo suo saepenumero me delusum esse. dum enim meram praese ferre certitudinem uidetur, nescio quae animo irrepit fluctuatio, ueluti anguillā prendēs quo intentius manū constringit, eo facilius illa subterfugit. Cri. Fac reminiscaris. Aris. Quiesce. Cri. Redijt memoria? Aris. Nondum. Cri. Profecto mirari non sufficio, q tam facilem circuli rectilineationem nemo priscorū adinuenerit, qui longe difficiliora enisi sunt. Aris. Quid tu tecum? Cri. Nihil ad te Si quod quaerebas menti redditum est, edisserе. Aris. Ah Critia mi nō est hac in re terendus dies, Demipho noster exemplum habet, is ubi domum redibit cuestrigio nobis afferet. Cri. Potes ne recordari quo demonstrationis genere usus fuerit ille philosophus, mathematico uidelicet, an alio quopiam? Aris. Mathemati cum haud uidetur. Cri. Frustra igitur hoc mane obtundis, qui conclusionē hanc absq; demonstratione portas: facisq; ut hac atq; illac cursitem si quid certitudinis habeat explorando. Dum autē sic cogito, modus occurrit, qui, nisi me animus fallit, quietem nobis afferet. Aris. Eum exponas amice mi. Cri. Ausculta igitur. Archimedes noster in libello mensurationis circuli, officio numerorum demōstrauit ambitum circuli siue circumferentiā addere super triplum diametri suæ minus quidem septima parte eius: maius autē decem septuagesimis primis eiusdem diametri. Aris. Nemini dubiū id est. quid tum postea? Cri. Scies pedetentim, si prius semidiametrū e d circuli minoris in quadringētas nonaginta & septē æquas particulas apud intellectum secueris, erit enim una earum quælibet mensura communis omnibus lineis proposito nostro seruituris. cum rationales duntaxat lineas admittere sit consilium: ubi ergo unitatis characterem uidebis in lineis quidem unam huiusmodi particularum, in quadratis autem quadratellum eius fac intelligas. Mirandum praeterea nequaq; est, q numeros huiusmodi linearum negocio accommodarim, cum Archimedis supra memorato exemplo satis liceat. Lineis denicq; si ue longitudine siue potentia cōmuincātibus proportionē, esse quā & numerorum decimus Euclidis theoremate suo quinto docuit. imō uero lineæ tales sunt numeri realiter, intellectu secundum unitatem mensuræ cōmunis eas discernente. Aris. Placet apprime hæc tua introductio: iam enim pridem arbitrabar numeros in huiuscemodi linearum comparatione nihil habere loci, cum & alius quidam circulū quadrare frustra tentarit numeris fretus. Sed tu quo tendebas Critia perge. Cri. Diameter ad circumferentiam circuli se habet, quemadmodū semidiameter ad semicircumferentiam. Aris. Confiteor totius ad totum, dimidij q; ad dimidiū eandem habitudinē. Cri. Dimidia ergo circūferentia super triplū semidiametri addit minus quidem una eius septima: maius autē decem septuagesimis primis, sic enim in totis accidebat. Aris. Non eo inficias. Cri. Mille quingenta sexaginta una partes addunt super triplum quadringentarū nonaginta septem partiū de cem septuagesimas primas ipsius simpli. Aris. Ita est, una enim septuagesima de quadringentis nonaginta septem partibus est septem. hæc decies facit septuaginta, quæ superaddita mille quadringentis nonaginta uni particulis triplo uidelicet quadringentarū nonaginta septem partium, summā conflabunt mille quingētarum sexaginta unius partium. Cri. Laudem mereris Aristophile, qui tam facile ueritatem accipias. nonne igitur semicircumferentia circuli mille quingentas sexaginta unam partes superabit? Aris. Necessario res ita est. Cri. Totam denicq; circumferentiam a b g d duplo dictarum partium uidelicet tribus milibus centum uiginti duabus maiorem haberi negabis? Aris. Miniме. Cri. Id ergo memoriæ sedulo hæreat, ut dū opus eo fuerit extemplo respōdeas. Nunc ad triangu

297

1561

3122

lum z h l ueniendum est, ut quanta sit eius perimeter non lateat: aut quanta magnitudine minor necessario sit exploremus. Semidiametrum e d constituimus se cari in quadringentas nonaginta septē partes, quarum quadratū tu elicias. Aris. Ducenta quadraginta septem milia & nouem inuenio. Cri. Tantum est quadratum e d semidiametri, & toties quadratellū uniꝰ sæpe memoratarum partium in quadrato ipsius semidiametri e d reperietur. Sicut eñ pars linealis lineas oēs ita quadratellum eius omnes metietur superficies. Cum autem quadratum cordæ a d quadratum semidiametri e d duplet, erit ipsum quadratum a d quadringenta nonaginta quatuor milia & decemocto. Aris. Verum est. Cri. Hic numerus non est quadratus: proximus tamen eo maior quadratus radicem habet septingētā & tria. quamobrem cordam a b minorem esse septingentis & tribus constat. Aris. Nemini dubium. Si enim quadrato quadratū minus existat, costam quoq; costa minorem haberi necesse est. Cri. Erat autem semidiameter e d quadringētæ nonaginta septem partes: quibus adiunge memoratas septingentas & tres, ut summa resultet mille ducentarum partium, quibus profecto minor est congeries duarum linearum e d & a d. Aris. Ratio conuincit, nam idem cōmune duabus inæqualibus adiectum quantitatibus duarum summarū alteram altera minorem efficiet. Cri. Duabus demū lineis e d & a d simul iunctis æqualem statuebam diametrum z k, quæ ob eam rem mille ducentis partibus minor existet, quadratumq; eiusdem diametri mille quadringēta & quadraginta milia nequaq; attinget. Aris. Teneo, mille nanq; & ducentis partibus in se multiplicatis, mille quadringenta & quadraginta milia resultabunt. Cri. Quarta item pars quadrati diametri z k ex eo quadrato sublata, relinquet quadratū lateris trianguli æqui lateri circulo inscripti. Habent enim, ut supra cōmemoratū est, hæc quadrata proportionem sesquitertiam: ueluti quatuor ad tria, ex quatuor autem si quartam sui dempseris partem, tria residuabuntur. Aris. Bene. Cri. Quarta insuper pars de mille quadringentis & quadraginta milibus est tricēta sexaginta milia, quam ex toto suo auferens mille & octuaginta milia relinqui cernes. Cūq; sit proportio quadrati z k ad quadratum z l, tanq; mille quadringētorum & quadraginta miliū ad mille & octuaginta milia: utraq; enim earum sesquitertia est: erit permutatim quadrati z k ad mille quadringenta & quadraginta milia, ea proportio quam habet quadratum z l ad mille & octuaginta milia. Quadratum autem diametri z k minus est mille quadringentis & quadraginta milibus: unde & quadratum z l mille & octoginta milibus minus habebit. Hæc omnia patere uidētur: aut si quā habes ambiguitatē pulsam faxo. Aris. Certa intelligo uniuersa. Cri. Quadratus demum proximo maior mille & octoginta milibus, is enim quadratus nō est, radicem habet mille & quadraginta, quāobrem linea z l minor erit iā dictis mille & quadraginta. Aris. Haud incertum. Si enim quadratum lineæ z l minus est mille & octoginta milibus, minus quoq; erit pluribus: quare & ipsa costa z l minor erit radice quadrata huiuscemodi plurium. Cri. Firma igitur in animo tuo latus trianguli z l minus esse mille & quadraginta partibus: prope enim portui concessimus. Aris. Non inficiabor unq;, quod syllogismo ratū dedisti tuo. Cri. Veritas sibi me delegit amicum: eam equidem operæpreciū inuestigare studeo, inuentā autem suis cōmonstrare cultoribus: qua perspecta autor ipse ueritatis altissimus digniuscule saltem laudetur. Aris. Quàm iuuat audire quonā rerum tandem euades ò Critia. Cri. Pauculis prius detinebere uerbis Aristophile: continuoq; nisi fallax contentus abibis. Sed latus z l trianguli nostri æquilateri minus esse mille & quadraginta particulis adhuc confitere? Aris. Et confiteor & certum

scio

scio. Cri. Si hasce mille & quadraginta particulas ter repetiero, summã triũ milium centum & uigintí partium colligens, nonne partes ille triplum lateris z l, id est perimetrum trianguli æquilateri z h l superabunt? Aris. Maxime cum ut simplum ad simplum, ita triplum ad triplum, terminosq; proportionũ permutando luce clarius id uideatur. Cri. Perimeter itaq; triãguli z h l minor erit tribus milibus centum & uigintí. Aris. Negare non possum. Cri. Multo igitur minor erit tribus milibus centum & uigintí duabus particulis. Aris. Verum concludis, quid tum? Cri. Iam redde quod antehac dudum memoriæ mandatum iri iusseram. Aris. Quid hoc erat? Cri. Circumferentiam circuli a b g d maiorem esse tribus milibus centum & uigintí duobus. Aris. In memoria habeo. Cri. Perimeter ideo trianguli z h l, quæ minor erat tribus milibus centum & uigintí duobus, multo minor erit circumferentia circuli a b g d. Aris. Hem quo ruis? Cri. Perimetrum eam trianguli z h l non æqualem esse circumferentiæ dicti circuli demonstratum habes. Aris. Siccine conclusioni audes contradicere? Cri. Imò uero non audeo, sed cogor. Plerunq; tamen concursores ad metam supramodum intenti, & si campus transcurrẽdus sit planissimus, quidam tale brauij uacillare comperiuntur, quibus cum ne ludibrio habeamur computum censeo retractãdum. Aris. Recte suades, nam ubi alienum contrectare cœperis opus, si quid paulo ini quius carpas, geminum incurres uituperiũ: odium etenim amici & inscitia te tua condemnabunt, fac iterum perlustres singula. Cri. Aspicias & tu Aristophile, ut si quis error me fugiat tibi notetur. Aris. Ita libet. Cri. Hi numeri recte iacent, hoc bene stat, nihil ista multiplicatio fefellit, consequentiæ omnes bonæ habẽtur. Quid igitur obstat, cur non uera putes quæ concluſimus? Aris. Virum tantum temere sententiam suam pronunciasse uix habeo uerisimile. Cri. Quid tũ? Aris. Pace tua dixerim Critia mi, tãto philosopho nõ possum nõ adhærere. Cri. Ha ha tecum ego sentire uideor, quis enim omniũ nostra tempestate hominum cæteris tantopere præstat Geometris, ut nouam prorsus, etiam si tota pereat, tradere possit artem: cuius hactenus diuersi & magni passim extitere conditores. Sanè huic uiro & lineæ & numeri libentes obediunt. Aris. Quo amplius procedis Critia doctissime, eo perplexiorem me reddis, duas equidem inter diuersas partes incertus pendeo: utri earum concedã nõ satis doceor. Vellem non modo nõ contradicere memoratæ conclusioni, uerumetiam pro posse tutari, contra autem tuæ me deterrent argumentationes. Cri. Meas arbitraris esse rationes, quibus animi tui fidem hac conclusione arcebam? Aris. Tuas non putem, qui mirum in modũ cõfutandi officium assumpseris? Cri. Meas haudquaq; fac suspiceris: sed omnium prorsus & Geometrarũ & Arithmeticorum quos prisca tulit ætas concinnem fuisse uoluntatem, ne quis conclusionem huiuscemodi proferret, quibus ego præcomodernus instituor. Quocirca non mihi, uerum illis tribuas, siue acerbam dixeris alienæ sententiæ discussionem, siue dulcem ueritatis cuiuslibet inuestigationem. Aris. Satis hercle persuades, uanæ me hactenus credulitati nimium indulsisse. Fateor equidem trianguli nostri æquilateri perimetrum circumferentia dati circuli minorem haberi necessario, tandemq; rectam æqualem curuæ circulari producere, ac ideo circulum ipsum quadrare nihil spei supereſt. Hoc unum tamen postremo doceas, quantum intersit ueritati & opinioni meæ iam penitus abiectæ. Cri. Quantulum id sit, nemini mortalium natura in hunc usq; diem discernendum dedit, neq; enim perimeter trianguli numerum habet rebus ut antea dispositis: neq; circuli ambitum rationalem esse lineam constat. Sed illud accipe defectum perimetri trianguli à circumferentia circuli dati maiorem esse duabus sæpe dictarum

partium, nam ut supra ostensum habes, perimeter quidem trianguli minor est tribus milibus centum & uiginti: circumferentia uero circuli maior tribus milibus centum & uiginti duobus. Numerorum autem iam adductorum differentia est binarius: quare differentiam perimetri trianguli & ambitus circuli maiorem binario constat esse, modicū tamen: cuius deductionem cum parum afferat utilitatis missam facio. Aris. Propinque igitur ueritati concessit uir ille. Cri. Propinque adeo, ut sudoris sui fructu haud penitus frustrari uideatur: & quidem non sine gloria. in plerisq; nempe rebus uix prope uerum consistendi natura mortalibus donat licentiam. Aris. Nunq; ad te accedo Critia quin doctior abeam. Quā callide homo nodum mihi tantum dissoluit: neq; minus hilarem me reddidit contrarium ueritati refellendo, quàm si curuam circularem rectificandi aream ūe suā quadrandi facultatem tradidisset. Cri. Quid tecum taciturnus reputas? si reliqui nihil est quod me uelis, abire iam licet, absoluendum mihi est opus problematum Almagesti quod cœperam, iamdudum refrixit calamus, quē uix domum ingressus abijci iusseras: is denuo resumendus est horæ monet. Aris. Discedam hinc tua cum beneuolentia, si prius pollicearis huius negocij nostri exempla literis te mandaturum. Cri. Et scribam & communia tibi faciam: ea tamen lege, ut amicis nostris nostra scripta uisuris Critiam suum cōmendare studeas, secq; haud mordaci dente quempiam læsisse, neq; minimū sibi quid arrogasse persuadeas, qui tuo permotus instinctu quicquid id est ac lubens effecerit. Aris. Omnes digne tibi plausuros arbitror, quos dubia hucusq; sententia detinuit. ex ueritate autem declarata odiū tibi nasci tua non sinet modestia. Verum si opus fuerit tua iam nunc monita curabo satis. Vale.

Ἰωάννης ὁ γερμοῖνος τοῦτον διάλογον
οὐ τῇ ὀνενετίᾳ εὐτυχῶς ἐποίησε.

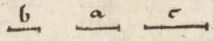
IOANNES GER

MANVS PAVLO FLORENTINO AR tium & medicinæ doctori celebratissimo, ac Mathematico rum præstantissimo S. P. D.

NISI fidelem te mihi præstolarer iudicem atq; tutorẽ Paule optime, tam audax facinus, tamq; dubiũ scribendi genus haud quaq; attentassem, siquidem nouam ac propriã tractantibus materiem, uix hac nostra tempestate satis parcitur, quin liuore quodã præter æquum & bonũ perturbentur. Nam si quid paulo obscurius traditur, uel diminutæ scientiæ uel etiam ignorantiæ notam impingunt æmuli. Si uero dilucide ac scitissime unum aliquid pronunctaueris, furem te non scriptorẽ esse extemplo insimulant. At ego recens disciplinarum uersator, longe duriorem accepi prouinciam, quippe qui alienam retractare ausim materiem: plurimisq; modis inquisitã curui rectilineationem quibusdã mediis examinare decreuerim. Sed Deum testor immortalem, nullam unq; lacessendi libidinem mihi incessisse: nullis me pollicitationibus gloriæ inductum esse, quo confidentius id agerem. Veritas nãq; sola tantos mihi labores effecit iucundissimos: quos emendationi tuæ subiecisse non pudebit. quoniam qui id officij dignius in mundo accipiat reperio neminẽ. Habes profecto plenissimam Geometriæ cognitionem: habes expeditissimam numerosæ peritiam, quibus absq; rebus sicut cõpleri non potuerũt hæc examina, ita neq; limabuntur: habebis, nisi me fallit animus, aliquando ocium literis alienis accõmodabile. Ingenium præterea tuum adeo mite & mansuetũ perspexi, ut si quæ nimium prolixa, aut non satis lucubrata, uel forsitan inordinate dicta offenderis, immode ste tolerare atq; interpretari non possis, quod inde libentius te facturum arbitror, ubi hæc scripta mea breui admodũ tempore absoluta perpenderis, lituris crebris primorum exemplarium id docentibus. Ne autem pluribus detineris, ad rem ipsam propius accedendum censeo, ubi exemplo Archimedis in libello suo de mensuratione circuli non nisi lineis siue longitudine siue potentia rationalibus utendum erit. Solebat enim Archimedes, si qua linea potentialiter tantum rationalis occurrit, inter duas notas lineas longitudine rationales eam constituere: quem uirum inter oẽs Mathematicos primarium imitatus ego quædam præambula huic negotio conscripsi, necessaria, quo facilius cætera intelligerentur: neq; eadem sæpius q; decet repetere oporteret. Hoc igitur literale exercitiũ, quod Venetijs peregrinanti mihi pauculos absumpsit dies, in manus tuas depono gratissimas limandũ atq; tradendum, si placuerit ei uiro, cuius res agitur: nolim equidem in publicum prodeat, nisi primo tibi perspectum fuerit atq; iudicatum. Vale.

DEFINITIONES.

Quantitatem per se notam uocabimus, quam mensura aliqua famosa aut pro libito assumpta secundum numerum notum metitur. Terminus quantitatis cuiuslibet dicetur quantitas alia per se nota maior aut minor huiusmodi quãtitate. Vt si b quantitas minor fuerit a quantitate, & c maior eadẽ, fueritq; utraq; quantitatum b & c per se notæ, b & c dicentur termini quantitatis a, siue ipsa a quantitas per se nota existat siue non. Dicemus quoq; a quantitatem inter huiusmodi



terminos contineri. His demum communibus animi cõceptionibus utemur. Minus adiectum minori constituit minus, maius quoq; maiori adiunctũ maius reddit. Subtractio minoris quantitatis ab alia quantacunq; maius relinquit q̃ subtractio maioris ab eadem. hæ sententiæ sunt manifestissimæ.

PRAEAMBVLA.

I.

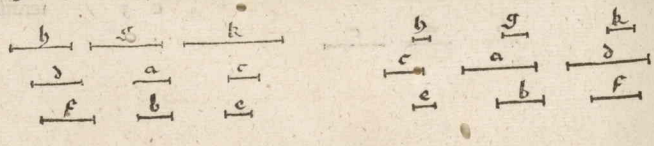
Si utraq; duarum quantitatum propositarum inter duos notos constituta fuerit terminos, congeries quoq; earum inter duos notos reperietur terminos.

Sint duæ quantitates a & b, inter binos terminos notos, a quidem inter c & d, b autem inter e & f, congregatisq; duabus quantitatibus a & b resultet g. Summa autem duarum c & e sit h, & congeries duarum quantitatum d & f sit k. Dico g quantitatem contineri inter duos terminos notos h & k. Cum enim c sit minor a, & e minor quantitate b, ex a autem & b coniunctis resultat g, erit per primam conceptionem, h minor g, similiter ostendetur k maiorem esse g quantitate. Sic g quantitatis inter duos terminos h & k cõprehenditur, quos oportet esse notos per. 3. primi Triangulorum, quatuor quantitatibus c e d & f notis existentibus. Quod si ad operationem accomodare uoluerimus, hoc præambulum numeros duorum terminorum minorum congregabimus, resultabit nãq; numerus termini minoris quæsitus, similiter numeros duorum terminorũ maiorum colligemus pro maiori termino quæsito. Idem etiam tenebit, si plures q̃ duo huiusmodi quantitatum objicientur ordines. At si una quantitatũ per se data fuerit, reliqua uero inter duos terminos notos habeatur, ipsa per se nota quantitas duarum uices quantitatum habebit: addita nanq; minori termino minorem, maiori autem adiecta maiorem constituet.

II.

Si fuerint duæ quantitates inæquales, quarum altera quidem inter duos notos terminos concludatur, altera uero per se nota existat, aut utraq; earũ inter duos notos constituatur terminos: differentia quoq; earum inter duos notos habebitur terminos.

Duæ quantitates inæquales a & b inter binos notos constituantur termini, a quidẽ maior inter c & d, b autem minor inter e & f: quarum quantitatum differentia sit g. Dico q̃ & g quantitas inter duos notos consistet terminos. Cũ enim e sit minor quantitate b, & b minor ipsa a, ac demum a minor d quantitate, erit & e minor d quantitate: differentia igitur duarũ quantitatum e & d sit k. sit deniq; c quantitas maior f quantitate, aliter enim non concluderemus g inter duos notos terminos: differentiaq; duarum quantitatũ f & c sit h: erit itaq; h minor g, nam b ex a dempta relinquit g differentiam, quare per communẽ scientiam secundam f quantitas maior ipsa b subtracta ex c minore q̃ sit a relinquit h minorem g quantitate. Item cũ b ex a sublata relinquat g differentiã, per eandem communem scientiã e quantitas minor ipsa b subtracta ex d maiori q̃ sit a, relinquit k differentiam maiorem g quantitate: sic g differentia inter duos



duos terminos h & k constituitur, quos quidem terminos notos esse oportet ex quarta primi triangulorũ, propter quatuor terminos c d e & f notos. Tenor autem operatiõis erit ille. Subtrahe minorem terminum minoris quantitatis ex maiori termino maioris quantitatis, & relinquetur maior terminus differentiæ, deinde subtrahe maiorem terminum minoris quantitatis ex minore termino maioris quantitatis, & relinquetur minor terminus differentiæ. Hactenus utrãq; duarum quantitatum inter duos notos constituti terminos supposuimus, tanq; difficilius: nã si altera duarũ huiusmodi quantitatum per se nota fuerit, facilius operabimur, dum enim maior earum per se nota existet, ex ea subtrahemus maiorem terminũ minoris quantitatis, & relinquetur minor terminus differentiæ duarum propositarum quantitatum: minor autem terminus minoris quãtitatis demptus ex ipsa maiori quantitate per se nota, relinquet maiorem terminum differentiæ. Si uero minor quantitas per se nota fuerit, subtrahemus eam singulatim ex duobus terminis maioris quantitatis, & relinquentur duo termini differentiæ quos quærebamus. Horum omnium demonstratio planissima est, immediate fermè ex communibus animi conceptionibus pendens. Exempla autem inferius occurrent plurima, rem hanc abunde declaratura.

III.

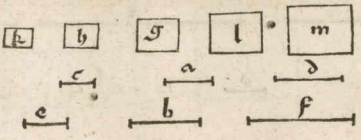
Si quis duas lineas inter binos terminos habuerit notos, quod ex ductu alterius earum in alteram nascitur, inter duos quoq; notos terminos comprehendetur.

Sint duæ lineæ a & b, quarum altera quidem a duos terminos c minorem & d maiorem habeat: b autem linea e minorem & f maiorem. Dico q; parallelogrammũ rectangulũ ex a in b inter notos duos consistet terminos. Fiat enim ex a in b parallelogrammũ g: ex e autem in a fiat h: item ex e in c producatur k, deinde ex b in d fiat l, & ex f in d nascatur m parallelogrammum. erit igitur per primam sexti elementorum proportio k parallelogrammi ad h parallelogrammũ, sicut lineæ e ad lineam b sumpta c cõmuni altitudine duorum parallelogrammorũ k & h: sed e linea minor est b, quare & k parallelogrammũ minus est parallelogrammo h. Similiter probabitur h parallelogrammũ minus ipso g parallelogrammo sumpta b communi altitudine duorum parallelogrammorum h & g, constat itaq; k parallelogrammũ minus esse parallelogrammo g. Non aliter probabimus parallelogrammũ m maius esse ipso g parallelogrãmo, sic g parallelogrammũ inter duos terminos k & m constituitur notos propter quatuor terminos c d e & f cognitos. *16.* primi triangulorum arguente. Modus autem operãdi habebitur, si minores terminos in se, alterum uidelicet per alterum multiplicabimus, maiores quoq; duarum linearum terminos per seipsos, nam ex hac quidẽ multiplicatione minor, ex illa aũt maior terminus procreabit.

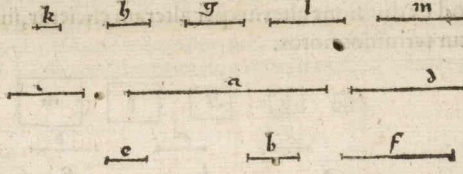
IIII.

Datis duabus quantitatibus singulatim inter duos terminos notos, quod ex diuisione alterius per alteram elicietur, inter duos quoq; claudetur terminos notos.

Sint duæ



Sint duæ quantitates a & b, quarum utraq; inter duos terminos notos constituatur, a quidem inter duos c & d : b autem inter duos e & f, diuidendoq; a per b, exeat g, dico g quantitatem inter duos notos claudi terminos. Diuisa enim a quantitate per f, exeat h, per eandē quoq; diuisa c exeat k, erit k quantitas nota propter duos terminos f & c notos, minor quantitate g. Nam cū per diffinitionem diuisionis ex b in g, fiat a quantitas, quæ etiam fit ex h in f, erit per. 15. sexti, siue uigesimam septimi proportio b ad f sicut h ad g, sed b minor est f: quare & h minor erit ipsa g quantitate. Item cum ex f in h fiat a, ex eadem quoq; f in k fiat c, erit per primam sexti, aut per decimāoctauā septimi proportio c ad a sicut k ad h, sed c minor est a, quare & k minor est h quantitate: erat autem h minor g, unde & k multo minor erit ipsa g. Rursus diuisa quantitate a per e, exeat l, d autem diuisa per e, exeat m, erit ut prius proportio b ad e sicut l ad g, sed b maior est quantitate e: quare & l superabit ipsam g. Similiter proportio m ad l erit ut d ad a, cumq; d maior sit a, erit & m maior l, erat autem l maior g, quare multo maior erit m ipsa g quantitate. Sic igitur g quantitas inter duos terminos k & m collocabitur notos, propter quatuor terminos c d e & f cognitos. Tenor operationis talis habebitur: Diuide minorem terminum quantitatis diuidendæ per maiorem in terminum quantitatis diuidentis, & exibit minor terminus quæsitus, item maiorem terminum quantitatis diuidendæ partiaris per minorem diuidētis, & exibit maior terminus quæsitus. Inter hos ergo terminos quantitas exiens continebitur. Solent autem nonnulli in multiplicationibus atq; diuisionibus quosdam habere scrupulos, mirum enim uidetur eis, q; linea trium (uerbi gratiā) pedum ducta in lineā, quatuor pedum faciat superficiem duodecim pedum, cum linea quatuor pedum ter sumpta, non nisi linea duodecim pedum linealium coaceruetur. Duarū enim quantitatū alteram per alterā multiplicare non est aliud, nisi alteram earum toties sibi coaceruare, quoties in reliqua est unitas: multiplicatio nanq; quælibet additioni cuidam respondet siue æquipollet. Circa hoc considerandū est, q; non cuilibet ductioni lineæ in lineā correspondet quædā multiplicatio, nam si lineæ in se ductæ fuerint incōmunicantes, altera quidem in alteram duci potest per diffinitionem eius, quod est lineam duci in lineam, nulla tamen multiplicatio habebit ibi locum: multiplicatio enim in numeris duntaxat reperitur, sed linearū incōmunicantium non est ut numerorū proportio. Cuilibet autem ductioni linearum cōmunicantium aliqua respondet multiplicatio: nam tales lineæ proportionem habent sicut numeri certi, imò ipsemet lineæ sunt numeri numerati, ex collectione mensuræ earum cōmunis resultantes, ut in exemplo. Duæ lineæ a b & b c in se ductæ, habeāt proportionem duorum numerorum tria & quatuor, a b quidem sit ut tria, id est mensura cōmunis sit ter in ea, b c autem ut quatuor, diuidaturq; a b in tres particulas æquales, & b c in quatuor, quæ signentur characteribus suis, ut in figura cernis, ducanturq; à punctis sectionum lineæ æquedistantes lateribus parallelogrammi a c, ita ut totum parallelogrammum resolutum habeatur in quadratella, quorum quodlibet à mensura communi describitur. Sicut ergo lineuncula b g est unitas linealis, ita quadratum



dratum ſuum b q eſt unitas ſuperficialis, totq; unitatum ſuperficialium eſt parallelogrammum b p, quot línealium línea b c per primam ſexti elementorum. Similiter tot ſunt unitates ſuperficiales huiuſmodi in parallelogrãmo b l, quot unitates líneales in latere ſuo a b. Cum denicq; quamlibet rem mundi pro unitate ſumere liceat, quemadmodum in ueritate ipſa exiſtit. Si ſumpſerimus parallelogrãmum b p tanq; unitatem, erunt tot tales unitates in toto parallelogrammo a c, quot ſunt unitates líneales in latere ſuo a b, quod non ineptius dici potuit de parallelogrammis b l, g m, h n & k d æqualibus, unumquodq; enim eorũ totíes eſt in ſuperficie a c, quoties unitas línealis eſt in latere b c. Vno igitur & eodẽ charactere aut ſigno, ſiue uocali ſiue ſcripto ſcilicet. 4. ſignificamus líneã b c ſuperficiem b p, & ſuperficiem b d, quælibet enim harũ quantitatum quatuor habet unitates. Similiter dicetur de latere a b & ſuperficiebus ex eo ſurgentibus, oẽs enim ternario atq; eius caractere. 3. ſignificãtur. Dum itaq; in hoc propoſito multiplicantur quatuor unitates per tres, non intelligas unitatem línealem, ſic enim nihil aliud q̃ línea reſultaret: ſed per unitatem de quatuor intellige quadratellum b q, per unitatẽ aũt de. 3. intellige ſuperficiẽ b p: hæc igit̃ quæ eſt quatuor quadratella ter ſumpta, conſtituet totam ſuperficiem b d ſcilicet duodecim quadratellorum, hoc modo in reliquis omnibus multiplicationibus te expedías. Sed ſint diuidenda. 12. per. 4. intellige. 12. quadratella, quorum unumquodq; deſcribitur ab unitate líneali b c, per quatuor huiuſmodi quadratella. Vnitas itaq; de. 12. eſt unum quadratellum huiuſmodi, & ſimiliter unitas de. 4. ſed unitas de. 3. quæ per diuiſionem exeunt, eſt ſuperficies b p. Facta igitur diuiſione, dicimus líneam a b eſſe trium unitatum, non q̃ unitas ternarij, qui per diuiſionem exiuit, principaliter ſit línea a e, aut alia ſibi æqualis, ſed ſuperficies a o, quæ cum ter ſit in tota ſuperficie a c, neceſſe eſt líneam quoq; a e ter contineri in línea a b, & ad hunc modum in cæteris.

V.

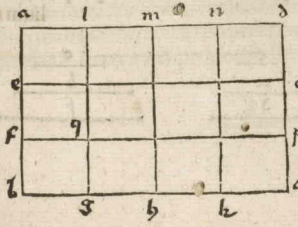
Lineæ duobus notis interiectæ terminis, quadratum quoq; inter duos notos cõcludetur.

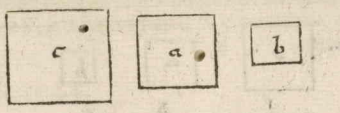
Línea a inter duos terminos b & c notos contineatur, dico q̃ & quadratũ eius inter duos habebitur notos, deſcribantur ex illis tribus líneis ſua quadrata eiſdem nominãda characteribus. per cõmunem itaq; ſcientiam ſicut b línea minor eſt a, ita & b quadratum minus eſt a quadrato: quod & per primã ſexti, ſi opus eſſet, oſtendi poſſet, reſecando uidelicet ex a línea æqualẽ ipſi b. ſimiliter quadratum c maius declarabitur quadrato a. ſic quadratum a inter duos terminos conſtituitur, notos quidẽ per primam primi Triangulorum. In operatione nihil difficultatis latet, ſi enim numerus terminorũ ſingulatim in ſeipſos multiplicaueris, habebis numeros terminorum quæſitorum.

VI.

Cuiuslibet quadrati per ſe cogniti, coſta aut per ſe nõta redditur, aut inter duos terminos notos cõpræhendi poteſt.

Si enim numerus huiuſmodi quadrati quadratus eſt, radix eius coſtam quadra d ti propo





ti propositi manifestabit. Si uero numerus ille non fuerit quadratus, necessario cõtinebitur inter duos quadratos numeros sibi uicinos, quorũ radices notificabũt duos terminos costæ quadrati propositi. Vt si quadratum propositum fuerit 25. costa eius erit 5. Si uero quadratũ tale sit 28. cum numerus ille 28 circa se proximos habeat quadratos 25 & 36. quorũ radices sunt 5 & 6. erit costa quadrati 28. inter hos terminos 5 & 6, hæc oĩa sunt manifestissima, & demonstratione nõ egent.

VII.

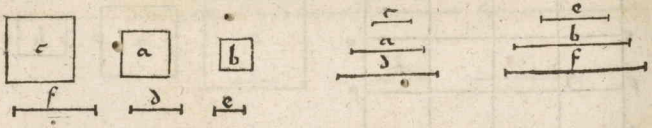
Si quadratum quodlibet inter duos terminos notos contineatur, costam quoq; eius duobus notis terminis interponi.

Vt si quadratum a fuerit inter duos terminos notos, qui sint b & c, dico costam eius, quæ sit d distinctionis gratia inter duos terminos notos contineri. Sit enim e costa quadrati b, & f costa quadrati c, quas oportebit esse notas, si saltem numeri quadratorũ b & c quadrati fuerint: Costam autem d esse inter duas lineas e & f nemo dubitabit communi animi conceptione informatus. Sicut enim quadratum b minus est quadrato a, ita & costa eius minor ipsa costa d habebitur, similiter costa f maior eadem concipietur. Quod si duo numeri quadrata b & c notificantes non fuerint quadrati, accipiendus est numerus quadratus proxime minor numero quadratum b notificante, & huius numeri radicem dabimus termino minori costæ d, sed pro termino maiori accipiendus est numerus quadratus proxime maior numero quadratum c notificante, huius radicem maiori termino costæ d accomodabimus. Quũ si alter duorum numerorum costæ d circumpositorum quadratus fuerit, alter autem non quadratus, utemur radice eius, qui quadratus est, pro uno termino: pro reliquo uero termino ut prius radicẽ numeri proximo minoris aut maioris assumemus, secundum quod res ipsa hortat.

VIII.

Si aliqua quantitas inter duos terminos notos comprehensa fuerit, quæcunq; ad eam quantitatem habuerit datam proportionem, & ipsa inter duos terminos notos collocabitur.

Sit a quantitas inter duos terminos notos c minorem & d maiorem, quantitas autem b ad ipsam a proportionem habeat notam: dico q & b quantitas inter duos terminos notos collocabitur. Cum enim proportio a ad b sit cognita, ponamus ei æqualem proportionẽ c ad e, similiter proportio d ad f sit sicut a ad b, oportebit igitur b quantitatem comprehendi inter duos terminos e f, ita q e sit minor b, & f maior eadẽ: erãt aũt duo termini e & f noti, ppter proportionem a ad b notã cum utroq; terminorum c & d. q autem e minor sit b & f maior eadem, sic constabit. Proportio c ad e est ut a ad b, & ideo permutatim c ad a sicut e ad b, sed c minor est a, igitur & e minor est b quantitate. Similiter permutando terminos duarum proportionum a ad b & d ad f, concludemus f esse maiorem quantitate b, quemadmodum d maior erat a quãtitate. Quantitas igitur b inter duos terminos notos constituetur, quod erat explanandum. Quo autem pacto duo termini e & f inueniantur, nemo hæc nostra scripta lecturus nescire debet, facile enim per legem quatuor numerorum proportionalium id



lium id absoluet, si productum ex multiplicatione consequentis proportionis notæ in utrumlibet duorum terminorum notorum diuiserit per antecedens proportionis notæ, exibit enim terminus minor secundæ quantitatis, si minorem primæ quantitatis multiplicabit, maior uero si maiorem. Quòd si per diuisionem huiusmodi numerus habens fractionem annexam, elisciatur, & libeat terminos secundæ quantitatis habere integros, abiscienda erit minutia, quæ circa minorem terminum secundæ quantitatis reperitur. Pro fractione autem, quam maior terminus habet, unitas integra adiscienda erit, hoc enim pacto nouos terminos integros secundæ quantitatis extrahemus, quorum alter quidem minor erit eo, quem per opus quatuor numerorum proportionalium accepimus, reliquus autem maior erit eo, quem huiusmodi opus elicuit. Numeros autem exemplares, quoniam faciles sunt, prætereundos censui.

IX.

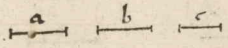
Si fuerint tres lineæ continuæ proportionales, quarum duæ quæcunq; inter binos terminos notos constituantur, reliqua quoq; inter duos notos terminos reperietur.

Sint tres huiusmodi lineæ a b & c, quarum duæ inter binos terminos notos consistant: dico q; & reliqua duobus notis interiacebit terminis. Si enim duæ extremæ terminos habeant notos, erit per tertium præambulum, quod sit ex altera in alteram inter duos terminos notos, illud autem per. 16. sexti elementorũ æquatur quadrato mediæ lineæ: sic quadratum mediæ lineæ inter duos notos consistet terminos, & ideo per septimum præambulũ ipsa linea media duos terminos habebit cognitos. Si uero media linea fuerit inter duos terminos cognitos cum altera duarum extremarum, erit per quintum præambulũ quadratum lineæ mediæ inter duos terminos cognitos, quadratũ autem lineæ mediæ cum altera duarũ linearum extremarũ per uiam diuisionis suscitabunt reliquam extremã: cunq; utraq; illarum sit inter duos terminos cognitos, erit & per. 4. præambulum reliqua linea extrema inter duos terminos cognitos.

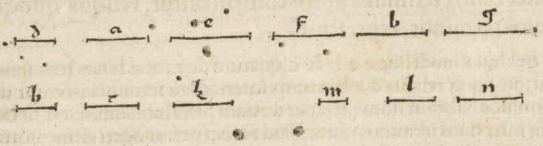
X.

Quatuor linearum proportionalium, si tres quælibet inter notos iaceant terminos, quartæ quoq; duos terminos notos suscitabimus.

Nam per. 15. sexti elementorum, quod sub secunda & tertia continetur, æquale est ei, quod sub prima & quarta: cognito igitur eo, quod sub secunda & tertia cõtinetur, mediante altera duarum extremarum, per uiam diuisionis cognoscitur reliqua: idem quoq; accidit, si quod ex prima & quarta fit, parallelogrãmum fuerit cognitum, ipsum enim per uiam diuisionis cum altera duarum mediarum cognita, reliquã suscitabit notam. In hoc igitur proposito nostro, aut ambæ extremæ inter notos consistunt terminos, aut ambæ mediæ. Si duæ extremæ inter notos iacẽt terminos, per tertium præambulũ, qd̃ ex ductu alterius in alterã fit, inter duos notos cõstituet terminos, & ideo p. 4. præambulũ altera duarũ mediarũ inter notos existente terminos, reliqua quoq; duobus notis circundabit terminis. Similiter si duæ mediæ inter notos cõsistant terminos, qd̃ sub eis continet, inter notos habebitur terminos per tertium præambulum, cunq; altera duarum etiam extremarum inter duos notos existat terminos, erit per quartum præambulum secundum uiam diuisionis & reliqua extrema inter duos terminos cognitos. In exemplo; Sit a lineæ ad b proportio sicut c ad l, a autem inter d & e terminos, b



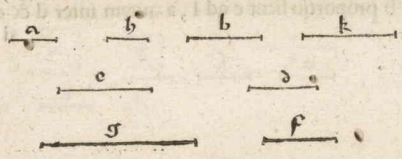
inter f & g, c inter h & k. multiplicabimus f minorem terminum secundæ in h minorem tertiæ, & productum diuidemus per e maiorem primæ, exibit enim minor terminus quartæ, qui sit m. Item g maiorem secundæ ducemus in k maiorem tertiæ, & productum diuidemus per d minorem primæ, sicq; exibit maior terminus quartæ qui sit n. Quantitas igitur l inter duos terminos m & n notos habebitur, quod erat absoluendum. Facilius autem id exequemur, si una talium quantitatum per se data fuerit, aut duæ etiam, utemur enim termino ipsius quantitatis per se datæ uice duorum terminorum. Vt si a quantitas per se data fuerit, b autem inter duos terminos, & c similiter inter duos, productum ex f in h diuidemus per numerum ipsius a quantitatis, & exibit m minor terminus quartæ quantitatis. Similiter productum ex g in h diuidemus per eundem numerū quātitatis a, & exibit n maior terminus quartæ, ita in cæteris. Rationes omniū dictorum ex tertio & quarto præambulis cum quintadecima sexti elementorum facile comparantur.



XI.

Si fuerint duæ quantitates, quarum proportio etsi ignota sit, inter duas tamen notas constiterit, fueritq; altera duarum quantitatum per se data, reliqua quoq; inter duos notos continebitur terminos.

Sint duæ quantitates a & b, quarum proportio minor quidem sit data proportiõe d ad e, maior autem proportione f ad g: sitq; a quantitas per se data. Dico q; b quantitas inter duos terminos notos comprehendet. Esto enim proportio a ad h sicut d ad e, proportio demum a ad k sicut f ad g, erit autem h quantitas nota, propter notam proportionem d ad e, atq; quantitatem a cognitam. Cum autem sit proportio d ad e sicut a ad h, proportio autem d ad e maior sit proportione a ad b, erit & proportio a ad h maior proportione a ad b, & ideo per decimam quinti h minor b quantitate. Similiter probabimus k maiorem eadem b quantitate, b igitur quantitas inter duos terminos notos constituitur, quod expectabatur declarandum. Operationē sic habebimus: Consequēs maioris duarum datarum proportionum multiplicabimus per quantitatem datam, & productum diuidemus per antecedens eiusdem maioris proportionis, exibit enim minor terminus secundæ quantitatis, deinde similiter consequens minoris datarum proportionum multiplicabimus per primam quantitatem, per se scilicet datam, & productum partiemur per antecedens eiusdē minoris proportiõis, & exibit terminus maior quæsitus. Ex commemoratis facile demonstrabuntur hæ duæ conclusiones, si duarum quantitatū utraq; inter duos terminos notos constituta fuerit, proportio quoq; earum inter duas notas claudetur proportiones. Item: Si duarum quantitatum proportio inter duas notas consistat proportiões, quarum quantitatum altera inter duos notos comprehendatur terminos, reliqua quoq;



quoq; inter duos notos reperietur. Sed quoniam ad propositum nostrum nō sunt necessariæ scitu, silentio prætereundas censui.

XII.

Nunc ad primordia exercitij nostri propius ueniendo, certissimū pronunciamus, circumferentiam circuli esse eiusdem generis cum qualibet linea recta, imo omnes lineas, siue rectæ fuerint, siue curuæ, quali cunq; curuitate, non differre specifice.

Nam idem est principium generationis omnibus lineis cōmune, scilicet punctus, cuius fluxu siue motu imaginario lineas nasci prædicant Mathematici: eo enī fluente, per uiā breuissimā linea recta creat̄, per uiā aūt aliā curua generat̄. Similiter sentiendū est de superficiebus oibus, & itē de corpibus: sicut enī ex fluxu pūcti linea, ita ex motu lineæ superficies, & ex fluxu superficiei corpus cōficit̄. Ad hāc rem cōfirmandā testimonia subsistunt plurimorū Geometrarū. Nonne Archimedes in principio primi de sphæra & cylindro demonstraturus congeriem laterum polygonij circulo circumscripti maiorē esse circuli circumferentia, assumit quaslibet duas rectas â punctis contactuū polygonij & circuli ad punctum unum concurrentes, esse maiores eo arcu, qui inter ipsa puncta contactuū intercipitur? maiores autem esse non possent, nisi de eodem genere quātitatis existerent: alias enim inter eas & arcum circuli non caderet proportio. Archimedes deniq; in de spiralibus lineis circumferentiæ circuli æqualem rectam inueniri posse supponit. Item in libello de mensuratione circuli eum triangulum rectangulum circulo æqualē esse demonstrat, cuius unum quidem latus rectum angulum ambiens semidiametro, reliquum uero circumferētiæ circuli æquale est, unde aperte sensisse dinoscitur Archimedes curuū & rectum lineale eiusdem esse generis. Ptolemæus quoq; in sexto libro magnæ compilationis suæ capitulo septimo, ubi ex digitis ecliptícis linearibus superficiales conatur elicere, Archimedem imitatus, proportionem circumferentiæ circuli ad diametrum eius inter duas proportiones claudi notas enunciat: aream insuper circuli dimensurus, semidiametrum circuli in semicircumferentiā suam ducit, quam rem profecto imprudenter ageret, nisi eiusdem generis diametrum cum circumferentia circuli esse cognouisset. Sed & in libello trium fratrū talia supponuntur, ubi etiam demonstrandum proponitur cuiuslibet circuli circumferentiam ad diametrum suam eandem habere proportionem. Id autem præsupponit curuum circularem & rectam esse eiusdem generis: proportionem enim diffiniunt Geometræ duarum quantitatum eiusdem generis certam habitudinem. Quo uehementius admirādi sunt, qui nescio quibus territi somnijs, curuū ad rectū inquiunt non esse proportionem. rogatíq; cur nam id fieri oporteat, respondent curuum & rectum non esse de eodem genere quantitatis, quæ res q̄ temeraria sit, facile quisq; senserit. curuum reuera & rectum passionem quidem quantitatibus inferunt, genus autem non diuersificant. Hunc rumorē ortum esse arbitror ex uerbis Aristotelis in Prædicamentis, ubi ad tempus usq; suum neminem circuli quadraturam testatur inuenisse: circuli autem quadratura non uidetur possibilis, nisi doceatur quonam pacto circumferētiæ circuli æqualis recta describatur. Difficultatem igitur quam nonnulli impossibilitatem dicunt, quadrandi circulum ex difficultate, aut si uis dicere ex impossibilitate, circumferentiam rectificandi consurgit. Hanc autem impossibilitatem rectificandi circumferentiam circuli, siue æqualem ei rectam describendi clamitant inde euenire, q̄ non sint eiusdem generis.

XIII.

Præterea non est ignorandum, circumferentiam circuli addere super triplum diametri suæ, minus quidem una septima eius, plus autē decem septuagesimis primis ipsius diametri.

Cuius rei certitudinem Archimedes in libello de mensuratione circuli manifestauit, numerorum fretus officio. Vtemur autem & nos penè simili ingenio numerorum in hoc nostro propositio, licentiam id faciendi ab Archimede sumentes. Neq; turbabit nos unq̄, q̄ plerisq; usum est, ineptum siue impertinens linearū habitudines per numeros inuestigare: nam in proposito nostro non nisi lineis rationalibus communicantibus utemur, quarum proportionem quinta decimi demonstrat esse ut numerorum. Quid quæso aliud suspicaris esse lineas, aut quantitates quasuis communicantes, nisi numeros ex coaceruatione mensuræ earum communis resultantes? Cur autem nonnullis in negocio linearum numeri suspecti sint, nisi me fallit animus, apertum dabo. Arabes olim circulum quadrare pollicíti, ubi circumferentiæ suæ æqualem rectam describ̄sissent, hāc pronunciauere sententiā. Si circuli diameter fuerit ut unum circumferentia sua, erit radix quadrata de decem. Quæ quidem sententia, cum sit erronea, quemadmodū alibi explanauimus, cunq; numeros rectilineationem effecturos introducat, numeri ipsi in hoc negocio suspecti habentur. Ex supra cōmemoratis trahitur, q̄ si diameter circuli diuisa fuerit in 497. particulas æquales, circumferētia circuli erit minor 1562. huiusmodi particulis, maior autem q̄ 1561. Similiter si semidiameter posita fuerit 497. particularum æqualiū, semicircumferentia minor quidem erit linea recta cōplectente 1562. huiusce modi particulas, maior autem linea recta habente 1561. tales particulas. Nam 1562. addunt super triplum de 497. unam septimā de ipsis 497. circumferentia autem circuli, ut præmissum est, minus addit. Item 1561 addunt super triplum de 497. decem septuagesimas primas de 497, circumferentiam autē addere super triplum diametri, quæ ponitur 497. plus q̄ decem septuagesimas primas, superius explanatum est. Non iniuria igitur dicemus circumferentiam circuli inter prædictos numeros existere, non quidem tanq̄ numerum, cum inter dictos numeros nullus cadat medius, sed tanq̄ maiorem minore eorum, & minorem maiore, ita q̄ addat supra minorem aliquam particulā unitatis, cuius particulæ quantitatem nemo usq; ad hodiernum diem didicit, sicut neq; comprehensum est circumferentiam esse communicātem diametro, aut incommunicātem. Hoc suspicor etiā esse illud, quod plerosq; impulit dicere, curui ad rectum non esse proportionem: ubi enim non esse proportionem cognitam siue datam dicere debebant, simpliciter abnegauere proportionem, quasi non sit proportio aliqua non cognita siue nō data, quales tamen multæ sunt. Sic ex genere proportionis ignoto proportionē nullam prorsus esse falso putauerunt. Dictos itaq; numeros uocabo terminos circumferentiæ, q̄ inter eos quantitas circumferentiæ concludatur, quem loquendi morem in alijs similibus negocijs obseruatum ire decreui. Non autem solum illos sed quoslibet etiam numeros maiores maiore dictorum, & quoslibet minores minore eorū, terminos appellabo. Nam si (uerbi gratia) circuli circumferentia est inter hos duos 1561. & 1562. erit etiam inter hos 1560. & 1563. & similiter de alijs. Quod autem de circumferentia circuli enunciauimus, ad omnes alias quantitates quibus binos huiusmodi terminos circumponimus, accomodandum erit.

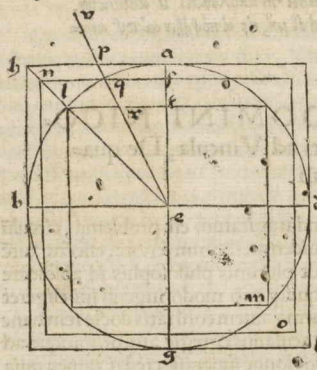
ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς Νικόλεω τοῦ κουσαίω ἐκδεδομένος. ἔστι δὲ οὗτος ὁ τετραγωνισμὸς αὔτευ εὐθείας ἴσης τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ διαγεγραμμένης καθάπερ ὁ Ἀρχιμήδης ἐποίησε. ἐπεὶ οὖν ἐκεῖνος οὐ φανερὰν προσφέρει τὴν ἀπόδειξιν, πειράσομαι τινὰ τρόπον εὑρεῖν τῆς ἀκριβείας αὐτοῦ ἢ τοὐναντίον. εἰ γὰρ ταύτῃ τῇ προτάσει πρακολουθεῖ τὶ ἀδύνατον, οὐκ ἔσθ' ὅπως ἡ εὕρησις καλὴ γενήσεται. εἰ δὲ μὴ, εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ ἀναστρεπτέος.

ἀγαθῇ τύχῃ.

IN EDITIONEM DOMINI NICOlai de Cusa Cardinalis S. Petri ad Vincula, De quadratura circuli.

APud maiores nostros uetus iamdiu agitatum est problema, circulũ propositum quadrare, breue quidem uerborum tenore, effectu autẽ ita arduum atq; inexplicabile, ut plurimis philosophis id absoluere tentantibus, tametsi diuersam quisq; pro modo ingenij sui eligeret uiam, spes omnis adempta sit, nemo autem eorũ satis docte rem hanc tradidisse uidetur. Nam etsi Archimedes Syracusanus egregie atq; propinque ad metam hanc accesserit, adeo, ut uniuersos alios longe superasse credat̃, tamen quia utitur lineis spiralibus ad propositum suum, quarũ descriptio difficilius fermê problema obijcit intellectui, q̃ ipsa circuli quadratura, uisum est plerisq; Archimedi huiusce problematis absolutionem haudquaq̃ constitisse. Adde q̃ in hac re utitur linea recta contingente spiralem in prima reuolutiõe descriptam in termino suo: quod profecto obscurum atq; incertum factu est. Neq; mireris, q̃ Archimedis in hoc negocio meminerim, de quo nihil scripsisse uidetur; quippe qui nulli librorum suorum de quadratura circuli titulum imposuit. Satis reuera hoc intendisse uidetur, dum circumferentiæ circuli æqualem rectam describere conatur, qua quidem descripta, nihil reliqui est, quod circulum quadrare prohibeat. Verum Archimedes ipse, quo pacto linea recta æqualis circumferentiæ circuli describeretur, nõ tradidit, q̃uis hanc conclusionem enunciauerit. Si linea recta contingat spiralem in prima circulatiõe descriptam in termino eius, educaturq; recta ab initio spiralis, continẽs angulum rectum cum linea, quæ circulationis existit, principium recta quæ ipsa contingente, & dicto circulationis principio intercipitur, circumferentiæ circuli æquabitur. Describere enim rectam æqualem circumferentiæ circuli præsupponit descripsisse lineam spiralem, eiq; contingentẽ applicuisse, quæ duo non minus profecto difficilia uidentur, q̃ circumferẽtiæ circuli æqualem rectam designare. Nonnulli tamen fuere, qui circulum quadrare tentarũt absq; descriptione præuia rectæ æqualis circumferentiæ circuli, quemadmodũ Hippocras, cui per lunulas circulum quadrare conanti, Philopatris notam insufficientiæ impinxit, & quidem non iniuria. Hac demum tempestate nostra, uir quidam egregius circulo proposito æquale quadratum describere tentauit, similiter absq; designatione rectæ æqualis circumferentiæ circuli, sed lege quadam constituit quadratũ medium inter duo quadrata, quorum alterum quidem circulo proposito circumscribitur, alterum uero eidem inscribitur, ita, ut circa diametros amborum consisteret, cuius intẽtionem q̃ paucissimis explicandam censui. Circulo a b g d super e centro descripto, circumscribatur quadratum h k, inscribaturq; quadratũ l m, pro-

l m, productis duabus circuli diametris a g & b d, orthogonaliter se secãtibus ad rectos etiam lateribus dictorum quadratorum incidentibus. ducatur deinceps ex centro circuli linea e h per angulos quadratorum h & l. & item alia e u indefinitæ longitudinis ex parte u, cuius quidem terminus e semper adhæreat centro circuli e, ipsa uero linea intelligatur moueri à linea e h uersus lineam e a secando circumferentiam circuli: intelligatur insuper quadratũ, cuius latera æquedistent lateribus prædictorum quadratorum, unum autem eorum laterum transeat per punctũ sectionis prædictæ in quo uidelicet linea e u secuit circumferentiã circuli: ipsum etiam quadratũ huiusmodi medium cõsistat circa diametros duorum quadratorum extremorum. Oportebit autem tale quadratũ necessario semper uariari, propter motũ lineæ e u circumferentiam circuli diuersimode secantis, ita q; quanto magis recedet linea e u à linea e h, tanto magis habebitur, dum autem linea e u coincidit cum linea e h quadratum, tale coincidet cum quadrato l m, cum uero ad situm lineæ e a tracta fuerit, coincidet quadratum tale cum quadrato h k. Præterea linea e u secabit duo latera quadratorum h k & l m, contingitq; aliquando, ut duæ particulæ dictorum laterum interceptæ, duabus lineis e u & e a simul iunctæ, sint æquales medietati lateris quadrati medij, quod scilicet secundum motum lineæ e u uariatur. Nam quando linea e u, iacet in situ lineæ e h, duæ lineæ h a & l t simul iunctæ, longiores sunt medietati lateris quadrati per punctum sectionis l transeuntis. Dum autem fuerit linea e u in situ lineæ e a, nihil inter duas lineas e u & e a intercipietur: sic ergo per motum lineæ e u à maiori transitur continue usq; ad non quantum, quare aliquando uentum est ad æquale: hoc, nisi me fallit opinio nemini dubium uidebitur. Sit itaq; nunc linea e u in tali situ, secans circumferentiam quidem circuli in puncto q, latera autem quadratorum h k & l m in punctis p & r, describaturq; quadratum n o, cuius unum latus incedat per punctũ q, eo pacto ut supra commemorauimus. Duæ autem lineæ p a & r t simul iunctæ, æquales sint ipsi lineæ n f, dimidio uidelicet lateri quadrati medij, quibus ita dispositis, prædicat philosophus ille quadratum n o æquari circulo a b g d. Qd si ita esset, ingentes non iniuria haberemus huic inuentori gratias, cũ quis nondum problema circuli quadrandi absolutum esset. Hæc namq; conclusio aliud præmitti sibi uellet problema, duo scilicet latera quadratorum extremorum, per lineam à centro circuli egredientem, sic secare, ut duæ particulæ p a & r t simul iunctæ, æquales essent dimidio lateri quadrati, quod per incisionem circumferentiæ in q puncto factam transit. Tale autem problema difficilem præ se fert absolutionem, unde licet uerum esset quadratũ medium sæpedictũ æquari circulo, dum duæ particulæ p a & r t coniunctæ, æquantur dimidio lateris quadrati n o, non tamen adhuc circulum quadrãdi facultatem nacti essemus. Circulum enim quadrare est aliquid operari, sed nihilo minus explorandum censeo, an uera sit hæc propositio, nã de problemate efficiundo posthac tacebo. Si ex centro circuli dati egrediatur linea



Propositoris.

línea recta índefinitæ longitudínis, ſecans circumferentiã eius, itemq; latera quadratorum circumſcripti ſcilicet & inſcripti ipſi circulo, quadratorum inquam circa eandem diametrum conſiſtentium, ſic q; duæ portiones laterum prædictorum quæ ab ipſa línea índefinitæ longitudínis, & ſemidiametro circuli orthogonaliter lateribus quadratorum incidente, intercipiuntur, coniunctim ſint æquales dimidio lateri quadrati, quod per punctum incíſionis circumferentíæ incedit, & circa diametros prædictorum quadratorum conſiſtit, tale quadratum medium æquale circulo propoſito habebitur. Hanc tamen propoſitionem facilius ex ſupra memoratis quiſq; intelliget, cũ per longam uerborum ſeriem, abſq; characterum aſſignatione. Exploraturus igítur quídnam uerítatis habeat hæc cõcluſio, præmitto hãc conſequentíam bene ualere. Sí duæ portiones p a & t r ſunt æquales líneæ n ſ, quadratum n o æquale eſt circulo a b g d, igítur ſi quadratum n o æquale eſt circulo a b g d, duæ portiones p a & r t coniunctim ſint æquales líneæ n ſ, ita q; alterum ex altero pendet, æqualitas uídelicet línearum p a & r t coniunctím cum línea n ſ, ex æqualitate quadratí n o cum círculo a b g d. Nam ſi díxeris æqualitatẽ cõgeríei líneaꝝ p a & r t cũ línea n ſ, nõ ſequí ad æqualitatẽ quadratí n o cũ círculo a b g d, ponaꝫ quadratũ n o æquale círculo a b g d, & cõgeríes duaꝝ líneaꝝ p a & r t, maíor (uerbí gratía) ípſa línea n ſ. Cũ aũt poſſibile ſit traducere líneã e u uerſus e a, donec cõgeríes líneaꝝ p a & r t fiat æqualís líneæ n ſ, nõ dico autem líneæ n ſ príus deſignatæ, ſed ei, quæ deſignanda erít per nouã ſectionem líneæ e u, & circumferentíæ círculí a, b g d. illud enim quoties oportuerít, repetendum uolo, ut tranſmota línea e u, quadratum quoq; n o uarietur, ſic q; latus eíus ſuperíus íncedat per punctum circumferentíæ círculi, ubí eam líneæ e u ſecabit. Procedente autem línea e u uerſus líneam e a, duæ líneæ p a & r t continue fiunt mínores: línea autem n ſ continue maíor, nam punctus ſectionís in círcumferentía círculí propínquíor erít ípſí puncto a, cũ antea fuerit. Sit ergo iam tranſmota ad talem ſítum, ubí congeríes duarum líneaꝝ p a & r t ſit æqualís ipſi n ſ: erit ergo ſecundum te quadratum n o æquale ipſi círculo a b g d, ſed ponebatur quadratum n o prímum æquale ípſi círculo: quare per communẽ ſcientiam quadratum n o ſecundum æquabitur quadrato n o prímo, totum parti, quod eſt impoſſibile. Non aliter ad inconueníens redigemus aduerſarium, ſi propter æqualitatem línearum p a & r t coniunctím ſumptarum cum línea n ſ dixerit, quadratũ n o eſſe æquale círculo a b g d, nõ tñ econuerſo, propter æqualitatẽ quadratí n o, & círculí prædícti duas líneas p a & r t coniunctím ſumptas, æquales eſſe líneæ n ſ, ſed mínores ípſa línea n ſ. Nam tranſmota línea e u uerſus h, donec duæ líneæ p a & r t fiant æquales ípſí líneæ n ſ, nouiter ut ſupra monuímus deſignandæ, erít ex tenore concluſionís ſupra memoratæ quadratum n o ſecundum æquale círculo propoſito, ponebatur autem & quadratum n o prímum æquale círculo: quare quadratum n o ſecundum æquabitur quadrato n o prímo, pars toti, quod eſt impoſſibíle. Síue igíť uera ſit propoſitío ſuperíus recitata ſiue non, conſequentíam præfatam optíme ualere oportebit, quod præterea amplíus confirmabitur hoc pacto. Quotieſcunq; ſignatur quadratum círca díametros quadratí h k, conſiſtensæ quale círculo propoſito, latus eíus ſuperíus ſecabit círcumferentíam círculí ín eíſdem ſemper punctís: alíàs enim facile cõcluderetur, partem æqualem eſſe totí. Sit ergo, q; propter duas líneas p a & r t coniunctím æquales líneæ n ſ, quadratũ n o ſit æquale círculo, ꝓpoſito, ſeceríq; latus eíus ſuperíus círcumferentíam círculí ín puncto q, ita, ut tría puncta p q & r ſint ín línea recta e u índefinitæ longitudínis, detur deínde quandocũq; líbet quadratũ æqua-

le circulo propoſito, quod circa diametros quadrati h k conſiſtat: ſecabit ergo ite rum latus ſuperius huiuſmodi quadrati circumferentiam circuli in puncto q, pro ducta'q; linea e u indefinitæ quantitatis per punctum q, ſecabit duo latera ſupe riora duorum quadratorum extremorum in punctis p & r, in quibus & prius ſe cuiſ: quare iterum duæ lineæ p a & r t coniunctæ, ſunt æquales lineæ n ſ. Sed quid in hac re manifeſtiſſima contero diem: ad principale negocium deſcendere iubemur, quod ut q; breuiſſime atq; facillime abſoluatur, ponamus ſemidiametrũ circuli propoſiti 497. particularũ æqualiũ, erit ob hoc per 13. præambulũ ſemicir cumferentia memorati circuli inter hos duos notos terminos 1561 & 1562. ma ior quidem minore, minor autem maiore eorum. cuiq; area circuli ex ductu ſemi diametri in ſemicircumferentiã naſcatur, quemadmodum Archimedes in libello de menſuratione circuli tradidit, & in libello trium fratrum habetur demonſtratũ erit per 3. præambulum area circuli inter duos terminos notos, qui ſunt 775817, & 776314. Sit deniq; quadratum n o æquale ipſi circulo, cuius latus ſuperius ſe cet circumferentiam circuli in puncto q: educta'q; linea e u indefinitæ longitu dinis per punctũ ſecet latus quadrati quidem circulo circumſcripti in puncto p, latus autem quadrati eidem inſcripti in puncto r. Sit autem quadratum n o cõ ſiſtens circa diametros quadrati h k, latus inſuper quadrati n o ſecet lineam e a in puncto ſ. Cum igitur quadratum n o ſit æquale circulo a b g d, cuius areã inter duos terminos notos concluſimus, erit & area quadrati n o inter duos ter minos notos: quare per 7. præambulum coſta ſua inter duos notos reperietur, qui ſunt 880. & 882. & ideo per 8. præambulum medietas huius coſtæ ſcilicet linea n ſ, inter duos notos concludetur, qui ſunt prædicti termini dimidiati, ſcilicet 440. & 441. Eſt autem linea e ſ æqualis ipſi n ſ, unde & ipſa inter commemoratos habebitur terminos. Sed per penultimam primi elementorum quadratum e q, æquipollet duobus quadratis linearum e ſ & ſ q. quadratũ aũt e q eſt 247009. quadratum uero e ſ inter hos conſiſtit terminos 193954 $\frac{1}{2}$. & 194078 $\frac{1}{2}$. illud quidem per 8. præambulum: nam proportio quadrati n o ad quadratum lineæ e ſ, eſt quadrupla, cum ſuarum coſtarum proportio ſit dupla. Sunt autem duo ter mini, quos aſſignauimus ſubquadrupli ad duos terminos quadrati n o. Igit quadrato lineæ e q per ſe noto, & quadrato e ſ inter duos terminos notos exiſtente, per 2. præambulum differentia eorum ſcilicet quadratũ q ſ inter duos terminos notos continebitur, qui erunt 52930. & 53055. quare & per 7. præambulum ipſa linea q ſ inter duos notos collocabitur terminos ſcilicet 230. & 231. Rurſus qua dratum e a ad quadratum e t eſt duplum, nam quadratum e a æquatur quadra to e l, quod per penultimam primi elementorum duplum eſt ad quadratum e t. Eſt autem quadratum e a 247009. quadratum ergo e t erit 123504 $\frac{1}{2}$. numerus autem ille non habet radicem quadratam, ſed quadratus proximo minor eo habet radicem 351. proximo autem maior eo quadratus radicem habet 352. quã obrem neceſſario linea e r erit inter hos 351. & 352. Eſt autem per quartam ſexti elementorum e ſ ad ſ q ſicut e a ad a p, quarum duæ quidem primæ inter bi nos terminos notos conſtituũtur, tertia autem per ſe nota eſt: unde & per 10. præ ambulum quarta quoq; a p inter duos notos terminos concludetur, ſcilicet 259. & 261. Amplius cum proportio e a ad a p ſit ſicut e t ad t r, quarũ prima qui dem per ſe data eſt, reliquæ uero duæ terminos circum ſe poſitos habent notos, erit per 10 præambulũ & linea t r inter duos notos, qui ſunt 182 & 185. ſed nu perrime a p fuit inter duos notos collocata, quare & per primum præambulum congeries duarum linearum a p & t r inter duos terminos notos comprehende

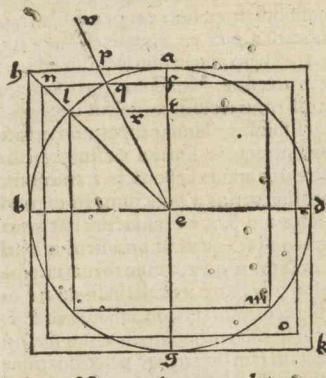
tur,

tur,ſcilicet 441 & 446.maior quidem minore exiſtens & minor maiore.Superius autem didicimus lineam n s eſſe inter hos duos terminos 440 & 441. maiorẽ ſcilicet primo & minorem ſecundo.congeries igitur linearum a p & t r maior exiſtens q̃ 441.multo maior erit ipſa linea n s.quare falſa eſt hæc hypothetica conditionalis:Si quadratum n o eſt æquale circulo a b g d.cõgeries quoq; lineaꝝ a p & t r æqualis eſt lineæ n s.Cunq; huiuſmodi propoſitio per præmiſſam huius negotij inferatur ex illa: Si congeries linearũ a p & t r æqualis eſt lineæ n s, quadratum n o æquabitur circulo a b g d: ex uero autem non ſequitur falſum: oportebit & dictam propoſitionem â ueritate recedere. Nondum ergo quadratũ æquale circulo propoſito deſignare licebit,niſi priùs rectam æqualem circumferentiæ circuli deſcripſerimus.Quòd ſi libeat ſubiectum huius propoſitionis effice re,ſcilicet q̃ duæ lineæ a p & t r coniunctæ,ſint æquales lineæ n s.dimidiæ ſcilicet coſtæ quadrati per inciſionem circumferentiæ modo ſæpe dicto tranſeuntis, oportebit lineam e u tranſmoueri à ſitu priſtino uerſus a punctum: cũ ergo ad huiuſmodi ſitum peruenierit,ubi duæ dictæ lineæ a p & t r coniunctim ſint æquales lineæ n s,quadratum n o creuiſſe interea conſtat.Quadratum autem n o primum ponebatur æquale circulo:quare quadratum n o ſecundum maius erit ipſo circulo,tametſi congeries duarum linearum a p & t r æqualis ſit lineæ n s in ſecundo ſitu lineæ e u.hinc iterum falſitas ſupra memoratæ concluſionis colligitur.Argumentationem autem,qua uſus eſt in hoc ſuo propoſito inuentor ille, nõ in prompto teneo,ſicuti neq; aliis libellis meis uti iam licet in hac peregrinatione diuturna.Ne tamen ſolem Venetorum fruſtra mihi luxiſſe quiſpiam fortaſſe clamitet,has notulas ut inciderunt raptim conſcribendas cenſui:quas quicũq; lecturus es,ueritati fauere potius,quàm Ioanni Germano ſuccenſere uelis: cui profecto non laceſſendi, ſed ueritatem cognoſcendi cupido huiuſcemodi periculum iniecit.

Venetijs die quinta Iulij, anno 1464.

τέλος τῆς πρὸς τὸ περιγωνισμοῦ τὸ κατὰ Νικόλεων τὸν κουσιάνον ὧ τῇ ὀνειρεπία εὐτυχῶς συμπλουμένων.

Νικόλεως ὁ κουσαῖος τὸν κύκλον τετραγωνίζειν βουλόμενος ἄνευ εὐθείας ἴσης τῇ τοῦ κύκλου περιφερίᾳ, τοιοῦτο κατασκευάζει διάγραμμαι. ἔχει δὲ ταύτη μέθοδος οὐδὲ ῥᾳδίαν οὐδὲ φανερὰν ἀπόδειξιν. διόπερ τῶν ἀριθμῶν ἀκολουθίᾳ πειράσομαι τοῦτο τὸ πρᾶγμα.



Circulus a b g d quadretur duabus diametris a g & b d, orthogonaliter se in centro e secãtibus: circumscribatur huic circulo quadratum h k, circa cuius diametrum aliud quadratum existens l m eidẽ circulo inscriptũ sit: intelligaturq; linea e u ad centrum circuli terminata, ex alia autẽ parte indefinitæ longitudinis, hanc lineã imaginemur moueri ab h uersus a secando circumferentiã circuli a b g d, sitq; tandem traducta ad eũ situm ubi secet latera duorum quadratorum prædictorum in punctis p & r, circũferentiam autẽ in puncto q, describaturq; quadratũ n o, circa diametrum h k consistens, cuius unum latus per punctum q transeat, sit autẽ medietas huiusmodi lateris n s, ita quod duæ lineæ a p & t r coniunctim sint æquales lineæ n s. Dicitur ꝙ quadratum n o sit æquale circulo a b g d. Id experiar lineis rationalibus intercedentibus.

Pone e a. 497.

1561. 1562.

Inter hos erit semicircũferentia b a d.

Quare per præambulũ area circuli erit inter duos notos terminos, nã ipsa fit ex semidiametro in semicircumferentiam.

1561
497
10927
14049
6244
775817

minor terminus areæ circuli a b g d.

1562
497
10934
14058
6248
776314

maior terminus areæ circuli.

Inter hos etiam terminos erit area quadrati n o, & ideo per præamb. latus eius siue costa inter duos notos cõtinebitur.

51 | 8
1374 | 8
775817 | 0
1676
1

1
512 | 8
138953 | 8
776314 | 1
1676
1

880. 882.

Inter hos est costa quadrati n o.

Quare per præamb. medietas eius scilicet linea n s inter duos notos habebitur.

880. 882.

440. 441.

Inter hos erit linea n s. cui æqualis est e s.

Quadratum autem e s demptũ ex quadrato e q relinquit quadratũ q s, & ideo per præamb.

quadra

quadratū q ſ inter duos notos habebitur.

497
497
3479
4473.
1988
247009

quadratum e a.

Eſt autem quadratū n o quadruplū ad quadratū lineæ e ſ. coſta enī ſua ad lineam e ſ dupla eſt. ſed quadratum n o eſt inter duos notos, quare & per præambulū quadratū e ſ inter duos notos concludetur.

ɣɣɜɜ
ɣɣɛɛɣɣ
1939541/4
minor terminus quadrati e ſ.

ɣɣ ɣɣ
ɣɣɛɜɣɣ
1940781/4
maior terminus quadrati e ſ.

247009
194079
52930
minor terminus quadrati q ſ.

247009
193954
530555
maior terminus quadrati q s.

ɣɣ | 2
ɛɣɣ930 | 3
4 6 | 0
4

ɣɣɣ1 | 2
ɛɣ0ɛɛ5 | 3
4 6 | 0
4

230 231
Inter hos eſt linea q ſ.

Eſt autem quadratū e a duplum ad quadratū e t nā e a æqualis eſt lineæ e t.

247009

1235041/4
quadratum e t.

ɣɣ3 3 | 3
ɣɣ2ɛ504 | 5
ɛ70ᵒ | 1

351 352
Inter hos eſt e t.

Sed proportio e ſ ad q s, eſt ſicut e a ad a p. cūq; dūæ illarū inter terminos notos ſint, & tertia per ſe nota, erit per præambulum & quarta inter duos notos.

440 230
441 231
497

497
230
14910
994
114310

497
231
497
1491
994
114807

ɣɣ
ɜɛ4 | 2
ɣɣ4807 | 6
44000 | 0
444
4

ɣ
ɣɛ449
ɜɛɣɛ1 | 2
ɣɣ43ɣ0 | 5
441ɣɣ | 9
444
4

259 261
Inter hos eſt linea a p.

Similis proportio e ſ ad ſ q eſt, ut e t ad t r, quare iterum per præamb. t r inter duos notos concludet. Item proportio e a ad a p ſicut e t ad t r. Hac ſecunda proportionalitate utār.

497 259
261

351
352

259
351
259
1295.
777
90909

ɣ4
ɛ65ᵒ
4946.
ɛɣɣ45 | 1
909099 | 8
49777 | 2
499
4

352
261
352
2112
704
91872

4
8
1 42
4295
52114 | 1
91872 | 8
49777 | 4
499
4

182 185
Inter hos est t r.

259 261
Inter hos erat a p.

441 446
Inter hos erit cõgeries ex a p & t r

440 441
Inter hos erat n s.

Congeries itaq; linearũ a p & t r maior est q̃ 441. Linea autem n s minor q̃ 441. quare cõgeries linearum a p & t r multo maior erit linea n s. Hoc autem pacto argumentabimur Tu ponendo congeriẽ linearũ a p & t r esse æqualem lineæ n s, nã hoc est possibile, asseris quadratũ n o æquari circulo proposito, sed dũ quadratũ n o æquatur circulo dicto, congeries linearũ a p & t r nõ est æqualis lineæ n s. ergo si congeries linearũ a p & t r est æqualis lineæ n s, ipsa congeries dicta nõ est æqualis lineæ n s quod est impossibile.

Est & alia uia directius id examinandi.

Ponamus semidiametrũ e a. 4970. unde per demonstrata Archimedis semicircũferentia b a d. erit inter hos 15610 & 15620. ductaq; semidiametro e a in utrunq; horum terminorũ, producẽtur duo termini, inter qnos necessario continebitur area circuli. & sunt isti 77581700 & 77631400. hæc ex prioribus cõputans facile trahuntur.

Nunc ponatur congeries linearum a p & t r æqualis lineæ n s, siue e s. dico autem, q̃ linea a p necessario erit inter hos terminos 2578 & 2586. Nam si posueris a p. 2578. erit cõgeries ex a p & t r minor ipsa n s. multo igitur minor esset, si poneres a p minorem q̃ 2578. Item si posueris a p 2586. erit dicta congeries maior ipsa n s. multo igitur maior esset si poneres eã maiorem q̃ 2586. Primum sic ostendetur.

Esto a p primus 2578.

2578
2578
20624
18046
12890
5156
6646084
quadratum a p.

24700900.
quadratum e a.

24700900
6646084
31346984
quadratum e p.

1 3
1 9948 | 5
619884 | 5
31346984 | 0
101018 | 8
111

5598. 5599.
Inter hos est e p.

Est autem proportio e p ad e a, sicut q e siue e a ad e s. & ideo e a est medio loco proportionalis inter p e & e a.

5598. 4970.
5599.
497.

3
47
98
1531
16842 | 4
2344311 | 4
24700900 | 1
5599999 | 1
55999
555
5

2
3
145
6972 | 4
17284 | 4
2348724 | 1
24700900 | 2
5598888
55999
555
5

4411. 4413.
Inter hos est e s siue n s ei æqualis.

24700900.
12350450.
quadratum e t.

25 | 3
3132374 | 5
12350450 | 1
67002 | 4
7

3514. 3515.

Inter hos est e t.

Proportio autem e a ad a p est ut e t ad t r. quare per præam. t r erit inter duos notos.

4970. 2578.
3514.
3515.

3514
2578
28112
24598
17570
7028
9059092

13
35
1137
48658 | 1
518365 | 8
9059092 | 2
4970000 | 2
49777
499
4

9059092
2578
9061670

11
34
1163
48775 | 1
519526 | 8
9061670 | 2
497077 | 3
4979
44
4

1822. 1824.

Inter hos erit t r.

2578. 2578.

4400. 4402.

Inter hos habebitur congeries linearũ a p & t r

4411. 4413.

Inter hos erat n s.

Congeries igitur ex a p & t r minor est q̃ 4402, & ideo multo minor q̃ 4411. Sed linea n s maior est quàm 4411. quare congeries dicta minor est q̃ linea n s. multo igitur minor esset si poneres a p minorem q̃ 2578. sic enim decresceret congeries ex a p & t r: linea autẽ n s cresceret.

Ponamus nunc a p 2586.

2586
2586
15516
20683
12930
5172
6687396

quadratum a p.

24700900
31388296

quadratum e p.

5 | 5
6268 2 | 6
31388296 | 0
101220 | 2
111

5602. 5603.

Inter hos erit e p.

Vtar per omnia syllogismis pristinis,

5602. 4970.
5603.
4970.

16
2577
2392182 | 4
24700900 | 4
5602122 | 0
56009 | 9
566
5

28
2479 | 4
2388776 | 4
24700900 | 0
5603333 | 8
56000
566
5

4408. 4410.

Inter hos est e s siue n s

4970. 2586.

3524.
3515.

2586
3514
10344
2586
12930
7758
9087204

42
69
121
49936 | 1
511184 | 8
9087204 | 2
4970000 | 8
49777
499
4

9087204
2586
9089790

14
45
62
1446
9951 | 1
411333 | 8
908979 | 0 | 2
497777 | 8
4999
44

1828. 1829.

Inter hos est t r.

2586. 2586.

4414. 4415.

Inter hos erit congeries ex a p & t r.

4408. 4410.

Inter hos erat n s.

Cum itaq; congeries ex a p & t r sit maior q̃ 4414. erit multo maior q̃ 4410. Linea autẽ n s est minor q̃ 4410. quare congeries ex a p & t r maior est q̃ linea n s. multo igitur maior fiet si linea a p maior statueretur q̃ 2586. nam sic cresceret congeries ex a p & t r, linea autẽ n s decresceret.

Concluditur ergo lineã a p necessario reperiri inter hos 2578 & 2586. dum cõgeries ex a p & t r est æqualis ipsi n s.

Nunc quod reliquũ est absoluamus.

2578. 2586.

Inter hos est a p.

Horũ quadrati proximo superius eliciti sunt hi.

6646084. 6687396.

24700900
6646084

31346984

minor terminus quadrati e p.

24700900
6687396

31388296

maior terminus quadrati e p.

Hos numeros hic repeto, ut omnes in parato habeantur, q̃uis etiam superius expressi sint.

13
19948 | 5
619884 | 5
31346984 | 9
101018 | 8
11

5
6268 2 | 5
31388296 | 6
101220 | 0
111 2

5598. 5602.

Inter hos erit linea e p.

Est autẽ e a medio loco proportionalis inter e p & e s. quare per præã. inter duos notos habebitur.

5598.
5602. 4970.
4970.

2
3
145
6972
17284 | 4
2348724 | 4
24700900 | 1
5598888 | 2
55999
555
5

16
2577 | 4
2392182 | 4
24700900 | 0
5602222 | 9
56000
566
5

4409. 4413.

Inter hos erit e s siue n s æqualis ei.

4409. 4413.

8818. 8826.

Inter hos erit costa quadrati n o, erat enim n s medietas dictæ costæ.

8818
8818

70544
8818
70544
70544

77757124

minor terminus quadrati n o.

8826
8826

52956
17652
70608
70608

77898276

maior terminus quadrati n o.

Superius autẽ area circuli erat inter hos, 77581700. & 77631400. Quadratum ergo n o maius est q̃ 77757124. & ideo multo maius q̃ 77631400. sed area circuli minor est quâm 77631400. quamobrem quadratũ n o maius est circulo a b g d, dũ congeries ex a p & t r æqualis est

qualis est lineæ, nisi ꝙ est contrarium enunciationi recitatæ. Quo autē pacto concluserim lineam a p esse oportere inter prædictos terminos, longū esset enarrare: & fortasse obscurum uideretur, paucis enim admodū artē Algebræ, siue rei & census satis cognitam scio, qua quidē arte hoc in negocio usus sum. Satis tamē erit unicuiq; uidisse ea, quæ hactenus tractauimus: sic etenim negare non poterit lineā a p inter dictos claudi terminos, dū congeries ex a p & t r æqualis est lineæ n s. De hoc finem facio.

Venetijs die .27. Iunij. Anno 1464.

ἐπαινῶμεν τὸν θεὸν τὸν σωτῆρα ἡμῶν, ὃς οὐ μόνον τῇ ζητουμένῃ ἀληθειαν ἀποκαλύπτει, ἀλλὰ καὶ πᾶν ψεῦδος ἐκφαίνει.

ALIVD EXAMEN SVPERIORIS editionis.

SEd repetenti mihi parumper negotiū istud, neq; quiescenti prius q̄ directiorē modum id explorandi reperiam, aliud iter monstratum est: quod literis mandare constituī. Principio igitur hoc certissimum prædico, ꝙ si duas lineas a p & t r æquales lineæ n s habere uoluerimus, necesse est lineā a p contineri inter hos duos terminos 2578. & 2586. dum semidiameter e a est 4970. particulæ. Quo autem pacto hos duos terminos inuestigauerim, longū esset enarrare, & ualde arduū, nisi doctissimus in Algebra existeres. Vt tamē prædicta ostendantur esse uera, q̄ paucissimis numeris utemur. Esto prius linea a p 2578. & semidiameter e a 4970. quadratū, e a duplū est quadrato e t: sed quadratū e a est 24700900. unde quadratum e t erit 12350450. hic numerus non habet radicem quadratam, sed radix quadrati proximo minoris est 3514. & proximo maioris 3515. quare necessario linea e t erit inter hos duos terminos 3514 & 3515. Est autem proportio e a ad a p, sicut e t ad t r, quare cum primæ duæ sint per se notæ, tertia autem inter duos terminos notos erit per 10. præambulū. & linea t r inter duos notos, qui sunt 1822. & 1824. unde & per primum præambulū congeries duarum linearum a p & t r inter duos terminos notos habebitur, scilicet 4400. & 4402. Deinde quoniā quadratum lineæ e p duobus quadratis linearum e a & a p notarum æquipollet, erit & quadratum ipsius e p cognitum, scilicet 31346984. hic autem numerus radice quadrata caret, radix tamē quadrati minoris eo proxime est 5598. & radix quadrati maioris eo est 5599. quare linea e p necessario continebit inter hos duos terminos 5598 & 5599. Est autem proportio lineæ p e ad e a sicut q e ad e s similitudine triangulorū p e a & q e s ratiocinante, & q e æqualis est ipsi e a, quare linea e a est medio loco proportionalis inter duas lineas p e & e s, atq; idcirco per 16. sexti quadratū lineæ e a æquabitur ei quod fit ex p e in e s. per 9. ergo præambulū, ut breuis sim, linea e s inter duos terminos complectetur cognitos, qui sunt 4411. & 4413. linea autem e s æquatur lineæ n s, quæ est dimidia costa quadrati per incisionem circūferentiæ q transeuntis

seuntis. Linea igitur n ſ maior eſt ☍ 4411. & ideo multo maior ☍ 4402. congeries autem linearum a p & t r minor erat ☍ 4402. Dum ergo linea a p eſt 2578. congeries linearum a p & t r minor eſt ipſa linea n ſ. & ideo neceſſe erit lineam a p maiorem eſſe ☍ 2578. ſi congeries duarū linearum a p & t r debebit eſſe æqualis ipſi n ſ. Nam ſi poneres lineam a p minorem ☍ 2578. fieret dicta congeries ex a p, & t r multo minor ☍ linea n ſ. quanto enim linea a p abbreuiatur, tanto linea n ſ maior redditur. Conſtat itaq; q̄ lineam a p maiorē eſſe oporteat ☍ 2578. ad hoc ut congeries ex a p & t r æqualis ſit ipſi lineæ n ſ. Quod autē lineam a p minorem eſſe oporteat ☍ 2586. ſimili ingenio lucubrabimus. erit enī ut prius linea e t inter hos duos 3514. & 3515. & ideo per 10. præambulū linea t r hos duos terminos 1828. & 1829. comprehendetur: hinc per primū præambulū congeries ex a p & t r inter hos terminos 4414. & 4415 conſtituetur. Rurſus quadratum lineæ p e innoteſcet propter duas lineas e a & a p cognitas. erit enim tantū 31388296. ſed hic numerus radicem quadratam non habet, minor tamen eo proximus quadratus radicem habet 5602: quare linea p e continebit inter hos terminos 5602. & 5603. Sed quemadmodum ſupra oſtendimus, linea e a medio loco proportionalis eſt inter p e & e s: unde quadratum lineæ e a cum ipſa linea p e notam ſuſcitabūt lineam e s. ſed lineæ quidem e a quadratum per ſe notum eſt. p e autem linea inter duos terminos notos iacet: quare & per 9 præāb. linea e s inter duos terminos notos habebitur, qui ſunt 4408. & 4410. ſed linea e s æquatur ipſi n s, quare & linea n s inter eoſdem concludetur terminos, minor ſcilicet exiſtens ☍ 4410. & ideo multo minor ☍ 4414. erat autem congeries linearum a p & t r maior ☍ 4414. Quando ergo linea a p 2586. particulas habebit, quales e a habet 4970. congeries linearū a p & t r maior eſt ☍ linea n s. quare neceſſe eſt lineam a p minorem eſſe ☍ 2586. ſi congeries ex a p & t r debet eſſe æqualis lineæ n s. nam ſi poſueris eam maiorem ☍ 2586. erit dicta congeries multo maior ☍ linea n s. quanto enim linea a p prolongatur tanto breuior linea n s efficitur. Ad ſummā igitur huc uſq; concluſimus lineam a p eſſe inter hos terminos 2578. & 2586. quādo ſaltem congeries ex a p & t r æqualis eſt ipſi n s. Nunc quorſū hæc tendant ne fruſtra diem contriuiſſe uidear, ☍ paucisſimis abſoluam. Cum linea a p ſit inter duos terminos notos, & linea e a ſit per ſe nota: quadrata autem dictarū linearum æquipolleāt quadrato lineæ e p, erit per 1. & 7. præambula linea p e inter duos terminos cognitos, ſcilicet 5598. & 5603. hos autem numeros ex ſupra cōputatis collegimus. eſt denicq; e a medio loco proportionalis inter p e & e s, ut etiam prius cōmemoratum eſt. ſed quadratum e a per ſe notum eſt, & linea p e iam inter duos notos habebatur: quare per 9. præambulum linea e s & ideo n s æqualis ei inter duos notos conſtituetur terminos, qui ſūt 4408. & 4413. inter quorū quadratos per 5. præambulū continebitur quadratum lineæ n s, qui ſunt 19430464. & 19474569. eſt autem quadratū n o quadruplum quadrato lineæ n s: coſta nāq; eius dupla eſt ad lineā n s: illud per 18. ſexti uel per 4. ſecundi elementorum: cūq; quadratum lineæ n s ſit inter duos terminos notos, erit & per 8. præambulū quadratum n o inter duos terminos cognitos, qui ſunt 77721856. & 77898276. Dum autem ſemidiameter e a eſt 4970. ſemicircumferentia circuli a b g d per 13. præambulum inter hos terminos collocabitur 15610. & 15620. quare & per. 3. præambulum area circuli huius erit inter terminos notos, qui ſunt 77581700. & 77631400. ſic

area

area circuli minor erit q̃ 7763 1400: & ideo multo minor q̃ 7772 1856. sed quadratũ n o maius erat q̃ 7772 1856. unde necessario area circuli minor erit quadrato n o. Igitur ut ad primordia huius negocij reuertamur, dum congeries linearum a p & t r æqualis est lineæ n s, area circuli a b g d, minor est quadrato n o: quod quidem repugnat conclusioni superius memoratæ, reliquũ ergo quisq; ueritatis amator concludere potest. Habes tandem ô lector syncere directiorem huius negocij lucubrationem, quam si numeros tibi obediẽtes reddideris, librare, limare, postremo etiam si ratio iusserit reprehendere licebit. Velim tamen ita tranquille Ioannis Germani scripta suscipias, ut modeste is sese rem hanc contrectasse arbitratur. Nam si more quorundã paulo uehementius in eos strideret, qui gloriam nondum effectæ rei sibi usurpant, aut ingenium suũ insolentius ostentant, tunc & maxime odio habendus esset, quippe qui uel erranti, quod humanum est, non daret ueniam: uel iuste forsitan redarguendo non compateretur: præsertim cum morbus ille familiaris quem dulcedo gloriæ parit, neminem non tangat mortalium. Quicquid igit̃ hac in re effectum est, ueritati iubenti potius q̃ obsequenti scriptori non iniuria tribuendum erit.

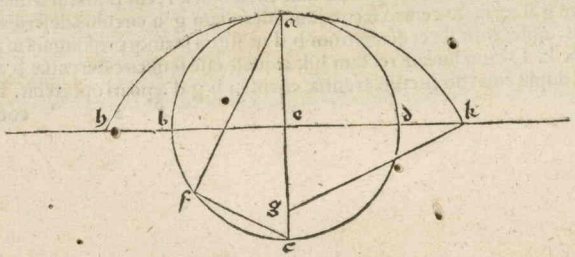
Venetijs die sexta Iulij. 1464.

τέλος τοῦ ἑτέρου πειρασμοῦ εἰς τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν Νικόλεω τῶ κουσαίω ἐκδεδομένον.

IN EDITIONEM EIVSDEM, QVO pacto semicircumferentiæ circuli æqualis designetur recta.

GEorgius ille doctissimus Mathematicorũ præceptor olim meus quandam curui rectificationem breuem admodũ mihi obiecit ac factu expeditissimam, cui principio quidem plurimũ fidei habuit autoritate inuentoris persuadente: ubi uero pro acumine ingenij sui inuentum huiusmodi examinare cœpit, nam demonstrationem nusq̃ cõperit, longe aliter q̃ ratus erat accidere didicit: lineam enim rectam, quam inuentor ille prædicauit æqualem semicircũferentiæ circuli, multo minorem eadem semicircumferentia conclusit: modus tamen Georgij acutissimi, quem huic negocio discutiendo accomodauit, memoriam reliquisse uidetur meam: si tamen is est, quem inferius exponam, non pudebit unquam aliena scripta retractare, quo recentior ad memoriam redeat imago præceptoris. Sententiam igitur inuentoris in primis recitandam censui. Sit circulus a b c d super centro e descriptus, quem duæ diametri suæ a c & b d quadrẽt: educaturq; altera earum b d utrinq; ad longitudinem indefinitam. latus trianguli æquilateri inscriptibilis huic circulo sit a f, cui ponatur æqualis a g: super g itaq; facto centro secundum distantiam g a circulus describatur, cuius circumferentia secet diametrum b d ut supra utrinq; prolongatã in punctis h & k. Dicitur lineam rectam h k æqualẽ esse semicircũferentiæ b a d: unde & duplã eius toti circumferentiæ circuli a b g d æpuari oportebit. Hãc

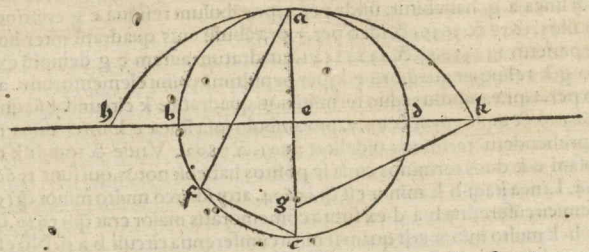
conclusionem nulla demonstratione firmatam uideo, quare more meo experiar per lineas rationales, quid sequatur si talis dispositio subijciatur, qualem hæc conclusio pſupponit. Continuabo duo puncta g & k per lineam g k, ducta etiam in circulo corda f c, quæ erit latus exagoni circulo proposito inscriptibilis. Si igitur posuerimus semidiametrum e a 497. particularum æqualium erit per. 13. præambulū semicircūferentia b a d inter hos duos terminos 1561. & 1562. Linea autem a f, scilicet latus trianguli æquilateri circulo inscriptibilis potentialiter triplat semidiametrum circuli, quēadmodum ex trigesima tertij uel octaua tertijdecimi & penultima primi elementorum concluditur. Sed quadratum semidiametri est 247009. quare quadratū a f erit 741027. hic autem numerus radicem quadratā non habet. minor tamē eo proxime quadratus hanc habet radicem. 860, & proximo maior eo habet. 861. quamobrē necessario corda a f reperietur inter hos duos terminos 860, & 861. erat autem a g æqualis ipsi a f, quare & a g inter eosdem cōtinebitur terminos. Cūq; semidiameter e a per se nota sit, erit per. 2. præambulum linea e g residua inter duos terminos cognitos, qui sunt 363. & 364. Iam consequēter ad quātitatem lineæ e k ueniendum est. Quoniam e g inter duos notos concludit terminos, erit per. 5. præābulum & quadratum eius inter duos terminos notos, qui sunt 131769. & 132496. sed erat quadratum g k per se notum: est enī g k æqualis cordæ a f, quadratū autē g k per penultimā primi duobus quadratis linearum e g & e k æquipollet: per. 2. præambulum igitur quadratū e k inter notos terminos habebit, qui sunt 608531. & 609258. & ideo per. 7. præambulum ipsa quoq; linea e k inter duos notos habebitur, scilicet 780. & 781. Hinc tandē per. 8. præambulū tota h k dupla ipsi e k inter duos cōprehendetur terminos notos, qui sunt 1560. & 1562. erat autē circūferentia circuli inter hos 1561. & 1562. & idcirco etiā inter hos 1560. & 1562. quicquid enī maius est maiore, maius quoq; minore existet. Vnde non possum non mirari quo nā pacto ad uerū ita propinque acceſſerit inuentor ille, ut inter binos terminos lineæ h k & semicircumferentiæ b a d non nisi unica particula intersit. Veruntamen nondum certitudo apparet huius sententiæ, sicut neq; incertitudinē cōprehendere potuimus. Nā etsi inter hos duos terminos 1560 & 1562. contineatur tā linea h k q̄ semicircumferentia b a d, in tanto tamē interuallo infinitæ quantitates inæquales intercidere possunt. Id autē euenire palam est propter grossiciē particularū 497. quas semidiametro e a tribuimus. Vt igitur animo nostro quietē cōparemus, ponatur denuo semidiameter e a 4970. particularū, quo demū fit, ut semicircūferentia b a d inter hos duos terminos reperiatur 15610 & 15620. præābulo. 13. id edocente. quadratū itaq; semidiametri e a erit 24700900. quemadmodū ex superiori cōputo elicitur. sicut enī terminos fecimus decuplos, ita multiplicationes eorum centuplas fieri oportet. Triplum autem huius est 74102700. & tantū erit quadratum cordæ a f syllogismo priori resumpto. quadratum enim lateris trianguli æquilateri circulo inscripti quadrato semidiametri eiusdem circuli triplum fore demonstratum est



tum est. Numerus autem ille radicem quadratam nõ habet, uerum minor eo proximus quadratus radicem habet 8608. maior autem habet 8609. quãobrẽ corda a f inter hos duos terminos reperietur 8608.& 8609. & inter eosdem quoq; linea a g habebitur. unde per.2.præãbulum residua e g continebitur inter illos.3638 & 3639. & ideo per.5.præãbulũ,eius quadratũ inter hos duos reperietur 13235044.& 13242321.quadratum autem e g demptũ ex quadrato g k relinquit quadratũ e k,per penultimã primi elementorum. atq; id circo per.2.præambulum duo termini noti quadratũ e k circundabũt qui sunt 60860379.& 60867656. & ex.7. præambulo ipsa linea e k inter duos notos comprehendetur terminos,uidelicet 7801.& 7802. Vnde & tota h k dupla ad ipsam e k duos terminos circa se positos habebit notos,qui sunt 15602. & 15604. Linea itaq; h k minor est q̃ 15604. atq; idcirco multo minor q̃ 15610. sed semicircũferentia b a d ex supra cõmemoratis maior erat q̃ 15610.quare linea h k multo minor erit quàm semicircumferentia circuli b a d. Nõ est igitur linea h k æqualis semicircumferentiæ circuli b a c, cuius contrarium inuentor ille asserebat. Quantum autem ueritati & opinioni inuentoris intersit nemo satis docere poterit. nondum enim semicircũferentiæ b a d neq; ipsius etiam lineæ rectæ h k longitudo mensurata est, tametsi utraq; earũ duobus terminis notis interiaceat. Verum differentia huiusmodi necessario maior erit sex particulis, quales 4970.semidiametro a e dedimus, minor autem decemocto huiusce modi particulis, erat enim semicircumferentia b a d maior q̃ 15610.sed 15610.superauit 15604. in sex particulis. quare semicircumferẽtia b a d excedit 15604.in pluri q̃ sex particulis. amplius 15604. superant lineam rectam h k, excessu quamuis ignoto. manifestum igitur est,excessũ semicircumferentiæ b a d ad rectam h k maiorẽ esse sex dictis particulis.Præterea cum recta h k maior sit q̃ 15602.& semicircumferentia b a d minor q̃ 15620: differentia autem terminorum commemoratorũ est 18. constat differentiã semicircumferentiæ b a d & rectæ h k minorem esse decemocto dictis particulis. Prope igitur ad metã accessit uir ille,quamuis medio frueretur facillimo. non tamen idcirco satisfecit intellectui ueritatem magis q̃ propinquitatem inuestiganti. nam si ad metam ipsam propinquius etiam q̃ Archimedes ueniendi fuerit libido, uiam in promptu habemus,ab Archimede sumptã. qui quemadmodum proportionem circumferentiæ ad diametrũ concluſit in duas, scilicet triplam, sesquiseptimam,& triplam superpartientẽ decem septuagesimas primas: ita inter duas proportiones multo inter se uiciniores eandẽ constituere poterimus circumferentiæ ad diametrum proportionẽ. sed in hoc non quiescit animus,cum recta æqualis circumferentiæ circuli nõ sit data.atq; idcirco spes omnis circulum quadrandi adempta. Si qui ergo siue modernorũ siue posterorum huius rei gloriam uenari uelint, curuæ lineæ rectificandæ uel circuli quadrandi problema sibi nouiter obiectum habent, q̃uis plurimi quidẽ uetustissimi philosophi id aggressi sint, nemo autem Archimedem in hoc philosophandi genere usq; ad hodiernũ diem superauerit. admirandus profecto esset,qui tantũ tamq; inexplicabile curui & recti discrimen rumperet: alterũq; in alterum commutandi facultatem traderet: is enim maiores nostros uniuersos ingenio suo,præsertim in Geometricis exercitijs,longe anteuenire crederetur.

Venetijs die octaua Iulij. Anno 1464.

Νικόλεως ὁ Κουσαῖος
ἐπιχειρεῖ διαγράψαι εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ.



Sit circulus a b c d supra centro e descriptus, quem duæ suæ diametri a c & b d quadrent, educaturq; altera earum b d utrinq; ad longitudinem indefinitam: latus trianguli æquilateri inscriptibilis huic circulo sit a f, cui ponatur æqualis a g: super g itaq; facto centro secundũ distantiam g a, circulus describatur, cuius circumferentia secet diametrum b d, ut supra utriq; prolongatam in punctis h & k. Dicitur lineam rectam h k æqualem esse semicircumferentiæ b a d: unde & duplam eius toti circumferentiæ circuli a b g d æquari oportebit.

Hanc conclusionẽ nulla demonstratione firmatam uideo, quare more meo experiar per lineas rationales, quid sequatur, si talis dispositio subijciatur qualem hæc conclusio præsupponit. Ex puncto itaq; g ad k, producta recta g k æquali ipsi g a, pono semidiametrum e a 497. particularum &c.

$3\frac{10}{7}$ $3\frac{1}{7}$
$\frac{22}{7}$ $\frac{223}{71}$
22 | 497
154 |
1562. 1561.

Inter hos erit semicircũferentia b a c necessario.

Linea autẽ a f, scilicet latus triãguli æquilateri potentialiter triplat semidiametrũ circuli a b c

497.

Linea e a siue f c.

497
497
2479
4473
1988
347009

quadratum e a.

247009
3
741027

quadratum a f.

1 | 8
~~1~~454 | 6
~~7~~4~~1~~027 | 0
~~1~~672
1
860. 861.

Inter hos est a f siue a g ei æqualis.

Quare per præamb. e g inter duos notos erit.

860, 861.
497. 497.
363. 364.

Inter hos erit e g.

Quadratum autem g k notum (est enim g k æqualis lateri triãguli) æqpollet duob. quadratis e g & e k. & e g iam inter duos notos habet, quare per & præãbula e k inter duos notos continebitur.

363
363
1089
2178
1089
131769

quadratum minoris termini e g.

364
364
1456
2184
1092
132496

quadratum maioris ter-

mini e g.

741027.

quadratum g k.

741027
132496

608531

minor terminus quadrati e k.

741027
131769

609258

maior terminus quadrati e k.

3
1161 | 7
608531 | 8
1456 | 0
1

3
1178 | 7
609258 | 8
1456 | 0
1

780. 781.

Inter hos est e k.

Quare per præamb. dupla sua, scilicet h k inter duos continebit̃ notos.

780. 781.
780. 781.

1560. 1562.

Inter hos est linea h k.

1561. 1562.

Inter hos erat semicircũferentia b a c.

Nullum igitur inconueniens adhuc apparet, nã si semicircumferẽtia est inter hos 1561. & 1562. erit quoq; inter hos 1560. & 1562.

Sed pono semidiametrum e a 4970. & ideo semicircumferẽtia b a c erit inter hos 15610. & 15620.

24700900.

tantum erit quadratum semidiametri e a.

74102700.

quadratum a f.

165
14546136 | 8
74102700 | 6
1620 | 0
72 | 8
17
1

8608. 8609

Inter hos erit a f.

4970. 4970.

3638. 3639.

Inter hos erit e g.

3638
3638

29104
10914
21828
10914

13235044

quadratum minoris termini e g.

3639
3639

32751
10917
21834
10917

13242321

quadratum maioris termini e g.

13235044

74102700

quadratum g k

74102700
13242321

60860379

minor terminus quadrati e k.

74102700
13235044

60867656

maior terminus quadrati e k.

314 | 7
116257 8 | 8
60860379 | 0
145660 | 1
15
1

31
11622 5 | 7
60867656 | 8
145660 | 0
15 | 1
1

7801. 7802.

Inter hos est e k.

7801. 7802.

15602. 15604.

Inter hos est h k.

15610. 15620.

Inter hos est semicircũferentia b a d.

Linea itaq; h k minor est q̃ 15604. & ideo minor q̃ 15610. sed semicircumferentia b a d maior est q̃ 15610. quare linea h k multo minor est semicircumferentia b a d. cuius contrarium affirmat conclusio.

Venetijs die 26. Iunij. Anno Christi 1464. Nona die ab exitu sum̃i põtificis de urbe Romana, ituri contra Teucros. Deus bene uortat.

ἀγαθῇ τύχῃ.

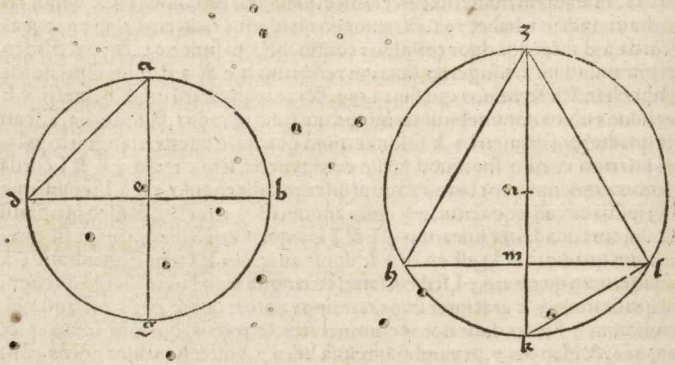
IN EDITIONEM EIVSDEM, QVO nam pacto triangulus æquilaterus describatur, ambitū habens æqualem circumferentiæ circuli dati. hoc nempe inuento circumferentiæ circuli dati, æqualem rectā, atq; deinceps ipsi circulo æquale quadratū designare facile esset.

SI quisq; est, quem studium philosophiæ celebrem reddere, aut mathematicarū decus æternitati cōsecrare debuit, præsertim hac nostra tēpestate, unicus es inter Italos Paule Florētine tāto dignus munere: quippe, qui disciplinas oēs adeo egregie tenes, ut cū Archimede, victoriam propemodum habiturus, certare uidearis. te philosophia ex alumno docili professorē doctissimum reddidit: necq; unq; quieuisses, uirorum optime, nisi post medicinam summopere percognitam, literas græcas didicisses, quo ingenij tui uim abundiorē ostenderes, & si quid som nolento interprete latinitati ineptius forsitā redditum è greco offenderes, ipse limare ac demum cæteros docere posses. Igitur Nicolao Cusano sancti Petri ad uincula cardinali, episcopo Brixineñ. uiro in omnibus scibilibus profundissimo, cuius ingenium magis diuinum q; humanum apud omnes nostræ ætatis homines reputatur, hæc tua excellentia adeo perspecta est & probata, ut familiaritatis suæ maximum participem te faceret: quod equidē ex dialogo quodam circumferentiæ circuli rectificandæ compertum habeo: ubi personas colloquentes Nicolaum & Paulum offendo. quem quidem dialogum nuper legēti mihi, tanta & tam suauis iniecta est animi uoluptas, ut nunq; ea maiorem in Mathematicis studijs senserim. Platonem enim ipsum in dialogo scribere soli tū uidere uidebar: ipsa denique materies multis quidē iamdudum celeberrimis quæsita ingenijs, mihi aūt cognitu desiderūtissima, animū supra modū affecit: & eo uehemētius, q̄ tantæ autoritatis uiros haberet tractatores. Sed iterū atq; iterū relegentē nūq; me defatigauit ille dialogus, quinimo pmaxime placuit. interea tamen scrupulus quidā crebro mihi obijciebatur. Nā etsi solidā enunciationi fidem haberem autoritate tantorū uirorum permotus, tamen pro consuetudine mea feruorē animi scirē cupientis magis q̄ credere, haudquaq; sedare potui, nisi argumentatiō quædā demonstratiua redderetur: ratio enim quā dialogus ille habebat, sicuti non plene intelligebatur, ita neq; animo satisfaciebat. quæres tandem effecit ut inuentum illud penitus negligerem: nihil lectu dignum arbitratus, in Geometricis potissimum: quod non demonstratione roboratur. Nunc autem in urbe Venetorum existenti mihi, forte in mentem redijt huiuscemodi inuentio: uerum argumentatio sua non occurrit, quam in exemplo commemorati dialogi uidebā. quamobrem decreui explorare, an hæc dicta inuentio circumferentiæ rectificandæ consonet demonstratis Archimedis, aut ei in aliquo repugnet. nam si consonabit, non poterit ullo pacto reprehendi, cum Archimedem in nulla unq; re defecisse constet. si autem repugnabit, quod reliquum est, facile quisq; concludere poterit. Tenorem aut̄ inuentionis sæpe dictæ, sub forma conclusionis talis, exprimendum censui. Si ex semidiametro circuli dati atq; corda quadrantis eius, directe in longū coniunctis diametrum alteri circulo constituerimus: triangulus æquilaterus eidem alteri circulo inscriptus, circulo dato æque circummensurabitur. Sed exemplari figurati-

guratione lucidius id fiet. Circulus a b g d datus, quadretur duobus diametris a g & b d in centro eius e se secantibus, ductaq; corda quadrantis a d, exponatur 3 k recta æqualis duabus e d, scilicet semidiametro circuli a b g d & a d cordæ quadrantis circumferentiæ. deinde 3 k per medium diuidatur in puncto n, super quo facto centro secundum distantiã n 3 describatur circulus 3 h k l, cui demum inscribatur triangulus æquilaterus 3 h l. Dicitur huiusmodi triangulum esse æque circummensuratũ circulo a b g d: id est tres lineas eius laterales coniunctim æquales circũferentiæ circuli a b g d. Quod si uerum esset, quis nesciret circumferentiæ circuli dati æqualem rectam designare, atq; deinceps circulũ ipsum quadrare? Huius igitur negocij prosequẽdi gratia, ponam semidiametrum a e circuli dati 497. particularum: erit itaq; semicircumferentia b a d, per 13. præambulũ inter hos duos terminos 1561. & 1562. & ideo tota circumferẽtia a b g d, inter hos duos 3122. & 3124. Quadratum autem cordæ a d, duplum est quadrato semidiametri a e, penultima primi id arguente. sed quadratum a e est 247009: quadratum ergo a d erit 494018. Hic autem numerus caret radice quadrata: proximus tamẽ minor eo quadratus radicem habet 702. & maior eo quadratus radicem habet 703. quare corda a d inter hos duos terminos continebit, qui sunt 702. & 703. & ideo per præambulum 2. congeries duarum rectarum a e & a d, inter duos notos comprehendet terminos, qui sunt 1199. & 1200. quadratũ ergo diametri 3 k inter duos notos continebitur terminos, qui sunt 1437601. & 1440000. Est autem quadratum diametri 3 k sesquitertium quadrato lateris trianguli æquilateri inscripti circulo suo: quod facile consiteberis, si in circulo 3 h k l cordã k l protraxeris: quæ erit latus exagoni inscriptibilis circulo 3 h k l, semidiametroq; ipsius circuli æquabitur. erit enim angulus k l 3 rectus, & ideo quadratũ 3 k, duobus quadratis linearum 3 l & l k æquale erit. cumq; ipsum sit quadruplum quadrato k l: est enim 3 k dupla ad ipsam k l: erit & quadratũ 3 k sesquitertium quadrato 3 l, scilicet lateris trianguli æquilateri circulo inscripti. sed quadratum 3 k erat inter duos terminos notos: quare per 8. præambulũ, quadratum 3 l inter duos notos cõtinebitur terminos, qui sunt 1078200. & 1080000. & ideo per 7. præambulum, ipsa linea 3 l inter hos duos notos constituetur terminos 1038. & 1040. totus autem ambitus trianguli 3 h l triplus est ad lineam 3 l. Per 8. ergo præambulũ, totus ille ambitus inter duos notos comprehendetur terminos, qui sunt 3114. & 3120. ambitus itaq; trianguli 3 h l minor est cẽ 3126. quare & multo minor cẽ 3122. erat autem circumferentia circuli a b g d, ut supra concluſimus, maior cẽ 3122. quo circa manifestum est, circumferentiam circuli a b g d maiorẽ esse ambitu trianguli a b g d. & ideo ipse triangulus 3 h l, non æque circummensuratur circulo a b g d dato, cuius contrariũ supra memorata concluſio enunciabat. Non consonat itaq; hæc concluſio demonstratis Archimedis, sed discrepat. differentia tamen inter ueritatem & opinionem inuentoris, maior est duabus particulis, quales 497. sunt, in semidiametro a e circuli dati. & minor decem huiusmodi particulis. minor enim terminus circumferentiæ circuli a b g d, excedit maiorem terminũ ambitus trianguli in duabus huiusmodi particulis. & ideo circumferentia circuli a b g d, excedit ambitũ trianguli in pluri cẽ duabus huiuscemodi particulis. Itẽ maior terminus circumferentiæ circuli a b g d, excedit minorem terminũ ambitus trianguli in decem huiusmodi particulis: quare circumferentia circuli a b g d necessario excedit ipsum ambitũ dicti trianguli in minori, cẽ decẽ huiusmodi

modi particulis. Habes tandem ô Paule doctissime, breue huius inuentionis examen, quod si unq̃ oculis tuis obiectum fuerit, pro mansuetudine tua legere uelis ac existimare. nihil enī unq̃ proferre ausim, quod iudicio tuo æquissimo non foret confirmatum. Quod si rationem meā iudicaris efficacem, tibi gloriam tribuendam censeo, qui singularis ac obseruandus mihi haberis præceptor: si uero inualidam aut forsitan nullam prædicaueris, id mihi lucro erit inuenisse, qui errores meos aperte atq; fideliter emendet, uirum integerrimū: quod genus hominū hisce nostris temporibus perrarū existit, adeo ista secta Gnatonica inoleuit, quæ & mores quosq; optimos interimit, & leges maiorū nostrorū funditus euertit. Sed ne distantius egrediar, ualere te iubeo.

Venetijs die nona Iulij. 1464.



Νικόλεως ὁ Κουσαῖος πειρασόμενος κύκλω τῷ δοθέντι ἰσοπερίμετρον ἀποδοῦναι τρίγωνον ἰσόπλευρον εὐθύγραμμον οὕτως πορεύεται, εἰ ταῦθα δὲ οὐκ ἀρκούντως τῆς ἀποδείξεως διὰ ῥητῶν τῶν γραμμῶν εὐθειῶν ἔστω τὸ πρᾶγμα συντελέσω. Ἰωάννης ὁ γερμάνος.

CIrculus a b g d quadretur duabus diametris a g & b d in centro eius e se secantibus, ductaq; corda quadrantis a d, exponat̃ 3 k recta æqualis duabus e d, scilicet semidiametro circuli a b g d & a d cordæ quadrātis. deinde 3 k per medium diuidatur in n puncto, quo facto centro secundū distantiam n 3, describatur circulus 3 h k l, cui inscribatur triangulus æquilaterus 3 h l. Dicitur huiusmodi triangulum esse isoperimetrū circulo a b g d: idest tres lineas eius laterales coniunctim æquales circumferentiæ circuli a b g d. Hæc enunciatio quoniam demonstrationem manifestā non habet, per lineas rationales pulchre examinabitur.

ponatur

ponatur a e ſemidiameter 497. particularum.

1561. 1562.

Inter hos erit ſemicircũferentia b a d.

1561. 1562.

3122. 3124.

Inter hos erit tota circũferentia circuli a b g d.

497
497
3479
4473
1988
247009

quadratum a e.

Eſt autem quadratũ a d duplum quadrato a e.

247009
247009
494018

quadratum a d.

1
22 4|7
494018|0
14 0|2
14

702. 703.

Inter hos erit corda a d.

Quare per præamb. cõgeries duarũ a e & a d, inter duos notos cõtinebitur terminos.

702. 703.
497. 497.
1199. 1200.

inter hos erit congeries linearum a e & a d, ſiue tota 3 k.

Et ideo per præamb. lineæ 3 k quadratum inter duos notos compræhendetur terminos.

1199
1199
110791
10791
1199
1199
1437601

minor terminus quadrati 3 k.

1200
1200
240000
12
1440000

maior terminus quadrati 3 k.

Eſt autem quadratũ 3 k ſeſquitertium quadrato 3 l, quare & per præam. quadratum 3 l inter duos notos concludetur.

2 1
1437601
359400 $\frac{1}{4}$
1078200 $\frac{3}{4}$

minor terminus quadrati 3 l.

2
1440000
360000
1080000

maior terminus quadrati 3 l.

4
1157|1
29169|0
1080000|3
22006|9
2

7
185|1
17326|0
1078200|3
22006|8
2

1038. 1040.

Inter hos eſt linea 3 l.

Perimeter autem trianguli 3 h l, tripla eſt ad lineam 3 l. quare per præamb. & ipſa perimeter inter duos terminos notos habebitur.

1038. 1040.
3 3
3114. 3120.

Inter hos erit perimeter trianguli 3 h l.

3122. 3124.

Inter hos erat circumferentia circuli a b g d.

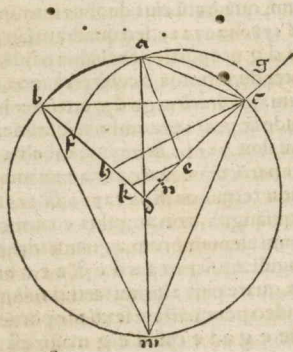
Perimeter itaq; trianguli minor eſt q̃ 3120. & ideo multo minor q̃ 3122. circumferentia autem circuli maior eſt q̃ 3122. quare perimet̃ trianguli non eſt æqualis circumferentiæ circuli a b g d, cuius contrarium aſſerebatur.

Venetijs 26. Iunij, 1464.

IN EDITIONEM EIVSDEM, QVO modo ſpaciū reperiatur æquilaterum & æquiangulum, cuius ambitus circumferentiæ circuli dati ſit æqualis: quod iterum ad curui rectificationē circuliq; quadraturā conferret, ſi bene traditum eſſet.

SAepe & multum ipſe mecum recenſui, atq; admiratus ſum uehementer, tantam tamq; inexplicabilem curui & recti diſtantiam, ut nemo ad hunc uſq; diem ſatis aperte tradiderit, quo pacto alterum ex altero naſceretur, præſertim in lineis: quibus tantum diſcrimen propter curuitatem & rectitudinem interiectū eſt, ut neq; ex recta linea curuam, neq; curuæ propoſitæ æqualem rectā conſtituere poſſimus. qua de re factum eſſe arbitror, ut poſt multas ueterum uigilias, ac uarios curuum rectificandi modos, Archimedes tandē permotus ſit excogitare quoddam medium, utroq; extremorum, uidelicet curuo & recto participans, exemplum trahens â tranſmutationibus naturalibus, ubi de extremo ad extremum nunq; tranſitur, niſi interceſſerit quoddam mediū, cum quo extrema ipſa tranſmutanda communitatem quandam habeant. Natiuitas autem lineæ rectæ fit per motum puncti breuiſſimū, curua uero linea circularis ex fluxu puncti cuiuſlibet a puncto centrali in motu ſuo æque diſtantis naſcitur. Hos igit duos motus, rectum uidelicet & circularem Archimedes commiſcens, motum quendā promiſcuum adinuenit, & per eum motum quandā lineam mediā inter rectū & curuū conſtituit, quam ſpiralem appellauit, cuius quidē lineæ officio curuæ circulari æqualem rectam deſignare conatus eſt. ſed ſicuti modū producendi hanc lineam non tradidit niſi per imaginationem, ita neq; contingentem rectā ei applicare in puncto quolibet docuit: quæ res neceſſariæ ſunt ad hoc, ut curuæ circulari æqualē rectā deſignemus. Vnde nō iniuria quiſpiā dicere auſit Archimedem curuæ circulari nunq; æqualem rectam deſignaſſe: quippe qui contingentem rectam ſpirali lineæ applicare nuſq; docuerit. Quis enim, ut ex primordijs Geometriæ exempla ſumamus, a puncto quolibet dato lineæ rectæ propoſitæ æqualem rectā produceret, niſi prius triangulum æquilaterū ſuper lineam datam collocare ſciret? Nemo denicq; angulo plano rectilineo æqualē redderet angulum, ſi prius tribus lineis rectis propoſitis, quarum quælibet duæ tertia reliqua maiores ſunt, ex tribus alijs eis æqualibus triangulū conſtituere didiciſſet. Ingentes nihilominus Archimedi habendæ ſunt gratiæ, qui tot & tā tis tamq; ſubtilibus inuentis Geometricis poſteritatem adornauit, ut ſempiternum inde monimentū haud indigne nactus ſit: qui profecto rem hanc plenius edidiſſet, niſi importuno milite Marci Marcelli Syracuſas obſidentis, ſpiritum cœlo reddidiſſet. ò ingenium uiri acutiſſimum. ò uigilias & labores perennes, quos in Geometricis ſtudijs ad mortem uſq; pertulit philoſophus ille celeberrimus. Quis unq; dignum aliquid tantis ſudoribus rependet? Quem non miſerebit huius hois, qui cariora duxit poſteritatis ornamenta publica q; uitā pro priam? cui minime pepercit, ut maximum Geometriæ theſaurum poſteris congereret. Occurrit demum illud inter omnia opera ſua admiratione digniſſimū, q; ſuperficiem planam curuilineā in planam rectilineā tertere docuerit, nullo medio intercedēte, quod curui & recti naturā cōiter ſaperet. demonſtrauit eni ſectionem coni parabolam eſſe ſeſquitertiam triāgulo rectilineo, qui baſim haberet

beret communem cum ipsa sectione parabola & altitudinem eandem, quamobrem facile redditur ipsi parabolæ sectioni æqualem rectilíneam designare superficiē. Sic in transmutandis snperficiebus uir ille acutissimus iter præbuit, quod in lineis inuentu erat difficillimum. Nolim tamen quispiam mihi succensеat, q superius dixerim, Archimedē curuæ circulari æqualem rectam non descripsisse, atq; idcirco quadraturam circuli nunq; attigisse: ipse enim de seipso id confiteri uidetur, ubi in libello dē mensuratione circuli curuæ circulari æqualem fermē, non tamen præcise rectam designare docet: officio numerorū concludens proportionem circumferentiæ circuli ad diametrū eius inter duas consistere proportiones: quem quidem libellum post lineas spirales scripsisse creditur: ut saltem propinque ad uerum quomodolibet accederet, quandoquidē æqualē curuæ circulari rectam in ueritate cōsequi non posset. ad metam enī si prope conieceris sagittam, tametsi punctum non tangas, haud inglorius habeberis. Hoc igitur curui rectificandi problema, ad nostræ ætatis uiros tandē deuolutum est quasi intentatum & nemine unq; satis absolutū: soluendi tamē spes atq; possibilitas, ægregium quendam hisce nostris diebus uirū inuasit, qui multos quidē alios modos id efficiendi tradidit faciles & absq; motu linearum fiendos: hunc uero difficilē & per motus linearum docuit absoluendum, cuius tenorem hoc in loco explicandū censui. Esto circulus propositus a b c super centro d descriptus, à cuius diametro a m æque uelociter moueri intelligant duæ semidiametri d b & d c, hæc quidem uersus dextram, illa autem uersus sinistrā: itaq; sint transmotæ ad eū situ, ubi b & c puncta æqualiter ab a puncto distent: ductaq; corda a c & linea a e ei æquali, super puncto e facto centro secundum quantitatem e a describatur circulus, cuius circumferentia secet semidiametrū quidem d b in puncto f, d c autem continuatā in g, ita ut d f sit subdupla ad d g. Dicitur q triangulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrum d g, æque circummensuretur circulo a b c. (.i. habeat ambitū æqualem circumferentiæ circuli a b m c.) Ponitur autem d f subdupla ad ipsam d g ob hanc causam. Nam si eidem circulo unum quidem inscripseris, alium uero circumscripseris triangulum æquilaterū, perpendicularis quæ ex centro circuli ad latus trianguli inscripti ducitur, subdupla est ad eam, quæ ex centro circuli ad latus circumscripti protrahitur perpendicularem. Quod si libeat quadratum æque circummensurabile circulo a b c designare, secundum intentionē huius inuentoris, dispositis cæteris ut antea, sit proportio lineæ d f ad lineā d g, sicut perpendicularis ductæ ex centro circuli cuiuscunq; ad latus quadrati eidem circulo inscripti, ad perpendicularem ductam ex centro talis circuli ad latus quadrati eidem circūscripti. Similiē de pentagono reliquisq; figuris æquilateris ac æquiangulis intelligendum est. Quamuis autem modus iste pulcher admodum uideatur, q ad omnes figuras æquilateras & æquiangulas accomodari possit, nullam tamen eius demonstrationē offendo, qua id roborari possit, quod p



eum exponitur. At si uera esset hæc sententia inuentoris, nondum circumferẽ
tiæ circuli æqualem rectam designare possemus, nisi prius subiectum huius cõ
clusionis prædisponere sciremus, difficile enim & nequaq; absolutum est, quo
pacto duæ semidiametri d b & d c sic elongent æque uelociter â puncto a,
ut dispositis cæteris, quemadmodũ supra commemorauimus, linea d f sit sub
dupla ad ipsam d g. Illud autẽ prius efficiendũ erit, cp circulari curuæ æqualẽ
rectã assignemus. problema itaq; curuæ circularis rectificandæ, ex alio proble
mate prius absoluendo, pendere dinoscitur. Sed eo prætermisso, ad sententiã
inuentoris supra recitatã ueniendum censeo, atq; explorandũ, consonet ne de-
monstratis Archimedis annõ. Hic igit̃ diu ac summopere laboranti mihi (diffi
cile nanq; erat modũ hunc examinare, propter motum linearum qui in eo sup
ponitur) tandem uia comprehensa est consequendi intentum. Sit itaq; secun
dum mentem inuentoris, linea d f subdupla ad lineam d g, & ob hoc trian-
gulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrum d g, æquecircũ
mensuratus circulo a b c: ponaturq; semidiameter a d 60000. particularum
æqualium, unde & circumferentiã circuli a b c inter duos terminos notos cõ-
prehendi oportebit. Nam quando semidiameter a d est 497. particulæ, semi
circumferentia circuli a b c per 13. præambulum inter hos duos terminos con
stituitur 1561. & 1562. quare & per 11. præambulum dum semidiameter a d
60000. particulas æquales habuerit, semicircumferentia circuli a b c inter hos
duos continebitur, 188450. & 188572. atq; idcirco per 8. præambulũ tota circũ
ferentia circuli a b c inter duplos dictorum terminorum reperietur, scilicet,
376900. & 377144. cumq; secundũ mentẽ inuentoris, ambitus trianguli æqui-
lateri inscripti circulo habenti semidiametrũ d g, æqualis sit circumferentiæ
circuli a b c, erit & dictus ambitus inter commemoratos terminos. sed ambi-
tus ille triplus est lateri ipsius trianguli: quare & per 8. præambulũ latus dicti
trianguli inter duos terminos notos comprehendetur, qui sunt tertiæ partes
dictorũ terminorum totius ambitus trianguli. latus itaq; trianguli continebit̃
inter hos terminos 125633. & 125715. Latus autẽ trianguli æquilateri circulo
inscripti, potentialiter triplat semidiametrũ eiusdem circuli. Vnde & per 8. præ
ambulũ linea d g semidiameter scilicet circuli, cui inscribi intelligit̃ dictus tri-
angulus, inter duos notos claudetur terminos. Nã latere ipsius trianguli exi-
stente inter duos terminos notos, scilicet 125633. & 125715. per 5. præambu-
lum, quadratũ eius duobus terminis notis concludet̃, qui sunt 15783650689,
& 15804261225. sed quadratũ lateris dicti trianguli ad quadratum semidiame
tri d g proportionem habet triplam. quare per 8. præambulum, quadratũ d g
inter duos notos iacebit terminos, qui sunt tertiæ partes prædictorũ termino-
rum. quadratũ ergo d g erit inter hos terminos 5261716896. & 5268087075.
unde & per 7. præambulũ ipsa linea d g inter duos notos reperietur terminos
qui sunt 72534. & 72582. habebat autem d c æqualis ipsi a d. 60000. æqua-
les particulas: quare per 2. præambulum residua c g inter duos notos cõtine-
bitur terminos istos 12534. & 12582. Sunt autem duo trianguli a d c, & e a c
æquianguli. nam angulus c communis duobus dictis triangulis per quintam
primi elementorum, æquatur utriq; angulorum d a c & a e c. Duo igitur tri
anguli æquicrures a d c & a e c binos angulos supra bases suas habẽt æqua-
les. quare per 32. primi tertius reliquus unius tertio reliquo alterius æquabitur.
& ideo per quartam sexti proportio d c ad a c siue e g æqualem ei est ut a c
siue e g ad e c. sed e g maior est ipsa e c, quare & d c maior est linea e g,

ablata

ablata igitur communi e c relinquetur d e maior ipsa c g. abscindatur itaq; ex ea e n æqualis c g, ita ut tota c n fiat æqualis ipsi e g: erit ergo proportio d c ad c n sicut c n ad e c, totius ad totam, sicut abscisæ ad abscisam, & id eo residuæ d n ad residuam n e, sicut totius d c ad totam c n: quare per 15. sexti, quod continetur sub d c & n e æquabit ei quod sub d n & n c. quod autē sub d c & n e continetur, inter duos terminos notos habetur per 3. præambulū. nam d c per se nota est, & n e æqualis ipsi c g inter duos terminos notos comprehendebatur. quare & quod sub d n & n c, comprehendetur inter duos terminos notos, qui sunt 752040000. & 754920000. Quod autem sub d n & n c continet, cum quadrato dimidiæ differentiæ linearū d n & n c, per quintam secundi, æquatur quadrato medietatis d c. cumq; quadratum medietatis d c sit notum, scilicet 900000000. erit per 2. præambulum, quadratū dimidiæ differentiæ linearū d n & n c inter duos terminos notos, qui sunt 145080000. & 147960000. & ideo per 7. præambulum, dimidia differentia linearum d n & n c inter duos notos terminos reperietur, qui sunt 12044. & 12164. Hæc autē dimidia differentia sublata ex medietate lineæ d c, relinquit lineam d n, & eidem addita, conficit totam lineam n c. quamobrem linea n c continebitur inter hos duos terminos 42044. & 42164. & ideo linea a c æqualis ei inter eosdem reperietur terminos. In hoc autē processu supponitur lineā d n minorem esse linea n c, cuius probationē inferius aperiemus. Producta deinceps linea c m cum ipsa a c angulum rectū continente, per trigesimā tertij, quadratum a m duobus quadratis linearū a c & c m æquipollebit per penultimam primi. cumq; linea a c inter duos terminos notos, atq; idcirco quadratum eius inter duos notos terminos habeatur, sed & quadratum diametri a m per se notum sit, erit per 2. præambulum, quadratū lineæ c m inter duos terminos notos. quadratū autem a c est inter hos 1767697936. & 1777802896. & quadratum a m est 14400000000. quare quadratum c m inter hos reperietur terminos 12622197104. & 12632302064. & ideo per septimū præambulum ipsa linea c m inter duos notos comprehendetur terminos istos 112348. & 112394. Ducantur demum lineæ b m & b c cum ipsa c m claudentes triangulum b m c simílem triangulo a d c. Cum enim arcus a c & a b sint æquales, erunt & residui ex semicircumferentijs b m & c m æquales, & ideo cordæ suæ b m & c m æquales. Vterq; autē angulorū a d c & b m c duplus est ad angulum a m c: ille quidem per 19. tertij: iste uero per ultimam sexti elementorum Euclidis, q; arcus b c duplus sit arcui a c. duo igitur anguli a d c & b m c sunt æquales. Cumq; duo trianguli a d c & b m c sint æquicrures, oportebit relíquos eorum binos angulos esse æquales: & ideo triangulos ipsos esse æquiangulos. quare per quartam sexti proportio d a ad a c est ut m c ad b c: & prima quidem harum quatuor proportionaliū linearum per se nota est, reliquæ autem duæ inter terminos notos constituuntur: quare per 10. præambulū linea quoq; b c duobus notis intercipietur terminis, qui sunt 78725. & 78984. Constat itaq; cordam b c maiorem esse semidiametro d c, cum terminus minor eius ipsam semidiametrum d c excedat. sed & quadratum b c minus est necessario duobus quadratis linearū b d & c d: id est duplo quadrati semidiametri b d: cum quadratum maioris termini b c minus sit duplo quadrati semidiametri b d. quare per 42. primi Triangulorum nostrorū angulus b d c acutus habebitur. ducta igitur perpendicularis c h ad lineā b d cadet intra triangulum, quemadmodū ex 30. primi triangulorū concluditur, sed per 45. eiusdē,

excessus

excessus quadratorum b c & c d æquatur ei quod sub differentia casuum b h & h d atq; tota ipsa b d continetur. sed excessus quadratorum b c & c d inter duos notos consistit terminos per 2. præambulum, quoniam alterũ quidẽ ipsorũ quadratorum per se notum est: alterum uero inter duos terminos cognitos comprehendit. est enim quadratum c d 3600000000. quadratum autẽ b c inter hos iacet terminos notos 6167925625. & 6238472256. quare per præambulũ 2. differẽtia horũ quadratorũ est inter hos terminos 2597625625. & 2638472256. & inter eosdem erit etiã quod sub differentia casuũ b h & h d ac tota b d continetur. cumq; tota b d per se nota sit, erit & per 4. præambulũ differentia casuũ b h & h d inter duos terminos cognitos, qui sunt 43293. & 43975. differentia autem duorum casuũ b h & h d dempta ex tota b d, relinquit duplum casus minoris, scilicet h d: per 2. igitur præambulum, duplũ lineæ h d est inter hos duos 16025. & 16707. quare & per 8. præambulum ipsa h d linea inter hos duos continebit terminos 8012. & 8354. Quadratum insuper h d cum quadrato h c æquipollent quadrato d c per penultimam primi elementorum. quadratum autem h d est inter hos duos 64192144. & 69789316. & quadratum d c per se notum est: quare per 2. præambulum quadratum h c inter duos notos reperiet terminos, qui sunt 3530210684. & 3535807856. atq; idcirco per 7. præambulum, ipsa linea h c continebitur inter hos terminos 59415. & 59463. Est autẽ per quartã sexti, proportio d c ad c h sicut d e ad e k perpendicularem ductam ex puncto e ad lineam b d: & prima quidem harum quatuor linearũ proportionalium per se nota est: reliquarũ uero duarum utraq; inter duos notos comprehenditur terminos. erat enim c n æqualis ipsi a c inter duos terminos cognitos, scilicet 42044. & 42164. tota autẽ d c erat 60000. & ideo residua d n inter illos duos notos cõcludet 17836. & 17956. Sed & c g siue e n ei æqualis inter hos duos erat 12534. & 12582. quare per primum præambulum tota d e continebitur inter hos terminos 30370. & 30538. Linea uero c h concludebat inter hos 59415 & 59463. quare & per 10. præambulum, quarta dictarum linearum, quæ est e k inter duos terminos notos comprehendetur, scilicet 30073, & 30265. Itẽ proportio c d ad d h est sicut e d ad d k quarta sexti arguente. sed prima harum quatuor linearum proportionalium per se nota est, scilicet 60000. secunda uero, scilicet d h concludebatur inter hos duos 8012. & 8354. tertia denicq; inter hos duos 30370. & 30538. quare per 10. præambulum linea d k inter duos reperiet notos terminos, qui sunt 4055. & 4252. Ex penultima autẽ primi quadratum e f duobus quadratis linearum e k & k f æquipollet. quadratum autem e f lineæ æqualis ipsi a c, superius inter duos terminos notos continebat: & ipsa linea e k inter duos notos consistit, qua de re etiam quadratum eius inter duos notos comprehendetur, quinto præambulo id edocente: quare & per 2. præambulum, quadratũ lineæ f k duob9 terminis notis circũdabit, qui sunt 851727711. & 8734175 67. unde & per 7. præambulum, ipsa linea f k duos circa se notos accipiet terminos, scilicet 29184. & 29554. Sic utraq; duarũ linearum f k & d k inter duos notos habebitur terminos: quare & per primum præambulũ congeries duarũ linearum f k & d k. scilicet tota linea d f inter duos notos constituetur illos 33239. & 33806. Sed linea d g habebatur superius inter hos terminos 72534. & 72582. atq; idcirco medietas eius inter hos 36267. & 36291. Linea igitur d f minor existens cẽ 33806. multo minor erit cẽ 36267. sed medietas lineæ d g maior est cẽ 36267. Est itaq; linea d f multo minor cẽ subdupla ad ipsã d g. Dũ

ergo

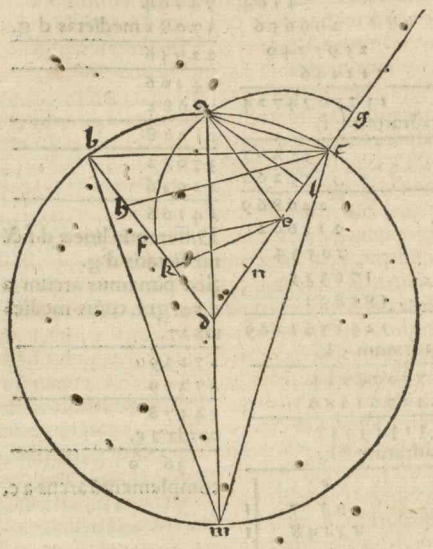
ergo triangulus æquilaterus inscriptus circulo habenti semidiametrũ d g, æquecircũmensuratur circulo a b c. ipsa linea d f minor est ꝙ subdupla ad lineam d g: quare nõ poterit stare sententia inuentoris, nisi contradictoria sese compatiantur in ueritate. Nam ex dispositione subiecti conceditur (quia supponitur) lineam d f esse subduplam lineæ d g, & deinceps ex argumentatione nostra concedi oportet lineã d f, manente eadem semper dispositione, nõ esse subduplam ad ipsam d g. Ad finẽ igitur laboris maximi perducti sumus, concludentes inuentionem supra recitatã ad uerum quidem accedere, intellectui autem ueritatem ipsam desideranti nequaꝙ satisfacere. Sed dubitabit forsitan quispiam lineam d n minorem esse linea n c, quod tanꝙ certum superius assumpsimus, ita ut punctus n cadat ultra punctum mediæ sectionis lineæ d g uersus punctũ d, quatenus per quintam secundi elementorũ, ratio nostra procedat, ut supra explanauimus. Illud ergo ratificabimus hoc pacto. Ponamus duas lineas d b & d c motibus suis dicteſſiſſe â puncto a, intantum ꝙ corda a c sit latus decagoni æquilateri inscriptibilis circulo a b c: & ponat linea a e æqualis ipsi a c: factoꝙ puncto e centro super eo secundum quantitatẽ e a describatur circulus, cuius circumferentia secet lineam quidẽ d b in puncto f, lineam autẽ d c continuatam in puncto g, quemadmodum etiã superius disponebatur: ducatur demum linea e f. Cum igitur secundum argumentationẽ superius factã, duo trianguli a d c & a e c sint æquianguli: ita ꝙ angulus a d c sit æqualis angulo e a c, & reliqui reliquis: angulus autẽ a d c, ꝙ ultimã sexti elementorũ, sit decima pars ꝙtuor rectorũ, atꝙ idcirco quinta ps duorũ rectorũ: erit & angulus e a c quinta pars duorũ rectorũ. sed angulus d a c est duæ quintæ duorũ rectorũ, ꝓpterea ꝙ duo anguli d a c & d c a æquales inuicẽ ualẽt ꝙtuor quintas duorũ rectorũ: erit igitur angulus d a e æqlis angulo e a c, qui æqlis erat angulo a d c. sic duo anguli d a e & c d a sunt æquales, & ideo per sextã primi, duæ lineæ a e & e d æquales habebuntur. posita demũ e n æquali ipsi c g, ita ut tota c n sit æqualis lĩneæ e g, atꝙ idcirco ipsi a c siue a e, erit d n residua æqualis ipsi e c. sed propter similitudinẽ trianguloꝝ a d c & a e c proportio d c ad a c sicut a c ad e c. & ideo proportio d c ad c n sicut c n ad n d. Est itaꝙ linea d c diuisa in puncto n, secundũ proportionem habẽtem medium & duo extrema, cuius maior portio est c n. In tali igitur situ linearũ d b & d c punctus n cadit ultra punctũ mediæ sectionis d c uersus centrũ circuli. Amplius cũ duo latera e d & d f triãguli d e f sint æqualia, erunt ꝑ 5. primi duo anguli e d f & e f d æquales. sed angulus e d f est duæ quintæ duorum rectorum, quia duplus ad angulum a d c, qui est quinta duorum rectorũ: quare & angulus e f d est quintæ duorum rectorum, & ideo angulus d e f una quinta duorum rectorum. igitur triangulus d e f triangulo e a c est æquilaterus & æquiangulus: erit itaꝙ d f æqualis ipsi c e, & ideo etiã æqualis lineæ d n: sed d n minor est ꝙ medietas lineæ d c, cum ipsa d n minor sit linea n c: multo igitur minor erit d n & ideo etiã d f ꝙ medietas lineæ d g. quamobrem oportet duas semidiametros d b & d c amplius elongari â puncto a, ad hoc ut d f fiat æqualis medietati d g: quanto autem magis elongantur dictæ semidiametri â puncto a, tanto minor fit linea d n, ponendo semper c n æqualem ipsi a c siue e g: dum autem a c est latus decagoni æquilateri circulo a b c inscriptibilis, linea d n ostẽsa est minor medietate d c, quare multo minor erit in maiore elongatione semidiametrorũ d b & d c â puncto a. Constat itaꝙ punctum n cadere ultra punctũ mediæ sectionis d c uersus pun

ſus punctum d, dum d f eſt ſubdupla ipſi d g. quod erat explanandũ. Nemo inſuper ſuſpicari debet, ꝙ circumferentia circuli ſuper e centro deſcripti, ſecet lineam d b in alio puncto ꝙ̃ f. concluſimus namq; ſuperius lineam e f ſiue a, c inter hos duos terminos 42044. & 42164. lineam autem d e inter hos 30370. 30538. Linea ergo e f, ſcilicet ſemidiameter circuli ſuper e centro deſcripti, maior eſt ipſa e d linea. quare nullus punctus lineæ d b eſt in circumferentia circuli ſuper e centro deſcripti, præter punctum f. Ad ſummã ergo concluditur ꝙ, ſtante ſuprà memorata diſpoſitione, triangulus æquilaterus inſcriptus circulo habenti ſemidiametrum d g, non habet æqualem ambitum circulo a b c. Nam ſi ita eſſet, ſequeretur lineam d f minorem eſſe ꝙ̃ ſubduplã lineæ d g, quæ tamen ſupponitur ſubdũpla eidem: quod implicat contradictionem. Huiuſmodi examen accomodari etiam poſſet ad quadratum, ad pentagonum, ac alias figuras æquilateras circulis inſcriptibiles: in triangulo tamẽ æquilatero facilius erat propter datam proportionem rationalem perpendicularium, quæ ex centro circuli ad latera triangulorum æquilaterorũ, inſcripti uidelicet & circũſcripti, pducunt̃: in reliquis aũt figuris æquilateris, pportiones huiuſmodi perpendiculariũ irrationales ſunt, inter binas tñ datas rationales, pportiones oẽs cõtinent̃, ꝺd quidẽ, p examine fiẽdo ſufficeret. Sed poſtq; ꝙ̃ in triangulo æquilatero nõ proceſſit inuẽtio cõmemorata, ueriſimile eſt ꝙ neq; in cæteris figuris locũ habeat. Tanto igit̃ labori noſtro fructus reſpondebit ille, ꝙ poſteri ſupra recitatam concluſionem lecturi, non ſuſpenſum habeant animũ, qualẽ nos diu geſſimus, priuſq; ꝙ̃ ſatis nẽgociũ iſtud exploraremus. ingẽtesq; nõ iniuria nobis agent gratias, qui ueritatẽ tantopere & ſcrutati ſumus & poſthac tuebimur. Neq; fruſtra uigilias noſtras huic exercitio nos impendiſſe quiſpiã ſuſurrare auſit, quamuis nihil aſtruxiſſe uideamur, quippe qui neq; curuam rectificare docuimus lineam, neq; æqualem circulo quadratam aream reddidimus. ſolent enim nonnunq; ꝙ̃ opiniones erroneæ grauius nocere ꝙ̃ ueræ ac firmæ ſententiæ prodeſſe poſſint. Hunc igitur ſcrupulum diuturna meditatione ac magno tandem labore eripuimus. Rationes autem quæ mouere potuerũt inuentorem, nullas inuenio ſcriptas, quibus, ſi quæ eſſent, non iniuria obuiandum eſſet in calce huius orationis: quas nequaq; ꝙ̃ Mathematicas, ſed Lullianas potius fuiſſe arbitror: qualeſcunq; tamen fuerint, efficaciam habere non potuerunt, niſi duo contradictoriã ſimul ſtare poſſe aliquis confiteat. Satis in hoc negocio luſiſſe uidemur, ad aliam deinceps inuentionem nouiſſimam tranſire licebit, ſi prius uniuerſos hæc noſtra ſcripta lecturos hortabimur, ut pro manſuetudine ſua noſtras ſuſcipiant rationes, non tanq; ꝙ̃ detractorias, ſed ueritatis duntaxat monſtratrices. nam ſi alium quempiam laceſſere, aut noſtra oſtentare facta cupidi fuiſſemus, multo plures, ꝙ̃ fecimus, rationes adduxiſſemus, more oratorum, qui ſuum ꝙ̃ plurimis argumentis confirmant propoſitum, quãuis non æque fortibus. Vnica igitur ratione uſi ſumus, ut humiliter ac ſincere ueritatem inueſtigaſſe potius credamur, ꝙ̃ arroganter alijs detraxiſſe.

Finis.

προηγούμενα τῶ τοῦ κύκλου τετραγωνισμῶ κατὰ Νικόλεων τὸν κουσαῖον διὰ σημάτων εὐθυγράμμων καὶ ἰσοπλεύρων τῶν γεγραμμένων ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ κύκλου δοθέντος.

Dispositio. Sit circulus a b m c super centro d descriptus, cuius diameter a m: duæ autē semidiametri eius d b & d c incœperīt simul moueri ab a puncto recedendo, hæc quidē uersus dextrā, illa uero uersus sinistram: motus earum sit æque uelox. Iāq; traductæ sint ad talē situm, ut ducta corda a c & linea a e sibi æquali, super pūcto e facto centro secundum quantitatem e a describatur circulus, cuius circumferētia secet semidiametrum quidē d b in puncto f: d c autē continuatam in g, ita ut d f sit subdupla ad d g. Dicitur ꝙ triangulus æquilaterus inscriptus circulo cuius semidiameter d g sit iso perimeter circulo a b m c.



60000.
semidiameter d a.

Ponat̄ arcus a c 36. gra.

18541
18541

37082
corda a c.

35267.
Linea a l.

54 0
complementū arcus a c.

48541.

11459.
Linea l c.

11459.

22918.
Linea e c.

37082.
Linea d e.

37082.

74164.
Linea d d.

72 0
arcus b c.

57063.
Linea c h.

18 0
complementū arcus b c.

18541.
Linea d h.

60000. 57063.
37082.

57063
37082
114126
456504
399441
171189

3 445
2 1 1 6 0 1 | 0166
35266

35267.
Linea e k.

60000. 18541.
37082.

37082
18541
37082
148328
185410
196656
37082

2 3 5
6 8 7 5 3 | 7362
11458

11458.
Linea d k.

37082
37082
74164
296656
2595740
111246
1375074724
quadratum e f.

35267
35267
246869
211602
70534
176335
105801
1243761289
quadratum e k.

1375074724
1243761289
131313435
quadratum f k.

1	
23 7	1
13148	1
12552954	4
131313435	5
2222890	9
2 2	
2	

11459.
Linea f k.

Sed quid opus erat tantis? cum d e & e f sint æquales, necesse fuit lineam d k æqualem esse ipsi k f.

11458
11458
22916
Linea d f.

Dum ergo ponitur corda a c, 37082. sit linea d g, 74164. & linea d f, 22916. minor scilicet ꝙ subdupla ipsius d g. qua er necessario corda a c maior erit, si d f debet esse medietas de d g.

74164
37082 medietas d g.
22916
14166
37082
51248
37082
22916
14166
Differentia lineæ d f. & medietatis d g.

Sed ponamus arcum a c 54. gra. cuius medietas 27.

27239
27239
54478
corda a c.

36 0
complementũ arcus a c.

35267.
Linea d l

24733
24733
49466
Linea e c.

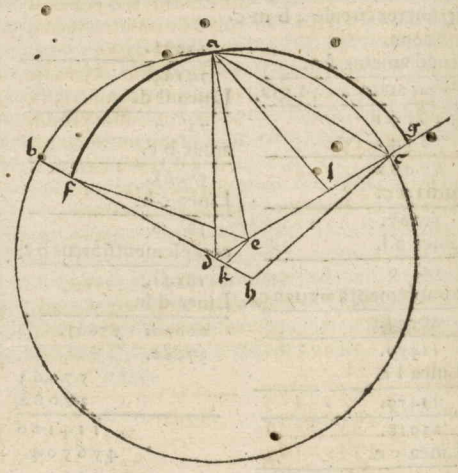
10534.
Linea d e.

54478.
65012.
Linea d g.

54
54
108
27
57063.
Linea c h.

18 0
18541
Linea d h.

60000. 57063.
10534.



57063
10534
228252
171189
285315
57063
52
60110 | 1642
10018

10018.
Linea e k.

60000. 18541.
10534.

18541
10534
74164
55623
92705
18541
13
19531 | 0894
3255

3255.
Linea d k.

54478
54478
435824
381346
217912
217912
272390
2967852484
quadratum e f.

10018
10018
80144
10018
10018
100360324
quadratum e k

2967852484
100360324
2867492160
quadratum f k.

11 8
596395 | 5
358244526 | 3
2867492160 | 5
10067008 | 4
11007 | 8
1

53549.
Linea f k.

3255.

50294.
Linea d f.

65012.

32506.
medietas d g.

50294
32506
17788
Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Dum igitur posui cordā a c 37082. linea d f minor fuit medietate d g in 14166. dum uero posui cordam a c 54478. linea d f maior fuit medietate lineæ d g in 17788. Faciam igitur secundum regulam positionis falsæ ad inueniendum propinque, quantam oporteat esse cordam a c sic ut d f fiat medietas d g.

positio 1.	positio 2.
37085.	54478.
14166.	17788.
error 1. diminutus.	error 2. additus.

37082
17788
296656
296656
259574
259574
37082
659614616

54478
14166
326868
326868
54478
217912.
54478
771735348
659614616
1431349964

17788
14166
31954
Summa errorum.

1.
32124
43365
256157
393463 | 4
1535786 | 4
295183188 | 7
1431349964 | 9.
319544444 | 4.
3195555
31999
311
3

44794.
Corda igitur a c uellet esse tanta. Sed examinemus illud.

22397.

22 57
22 57
45 54
Arcus igitur a c uellet esse tantus.

44 6
complementū arcus a c.

60000.
41755.
Linea d l.

18245
18245
36490

Linea e c.

23510.

Linea d e.

44794.

68304.

Linea d g.

45 54
45 54

91 48

88 12

59970.

Linea c h.

Respice secundam figuram, est enim angulus b d c obtusus.

1 48.

1885.

Linea d h.

60000. 59970.
23510.

59970
23510

599700
29985
17991
11994

1409894700

22541 | 4700
140989 |
23498 |

23498.

Linea e k.

60000. 1885.
23510.

23510
1885

117550
18808
18808
2351

253 | 6350
4431 |
738 |

739.

Linea d k.

44794
44794

179176
403146
313558
179176
179176

2006502436

quadratum e f.

23498
23498

187984
211482
93992
70494
46996

552156004

quadratum e k.

2006502436
552156004

1454346432

quadratum k f.

6
9
44 | 3
126582 | 8
5737395 7 | 1
1454346432 | 3
6766226 | 6
776 |

38136.

Linea k f.

739.

37397.

Linea d f.

68304.

34152.

Medietas lineæ d g.

3245.

Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Faciam iterum secundũ positionem falsam.

37082. 44794.

14166. diminutus. 3245. additus.

37082
3245

185410
148328
74164
111246

120331090

44794
14166

268764
268764
44794
179176
44794

634551804
120331090

754882894

Numerus diuidendus.

14166
3245

17411

Diuisor.

1
15
141
3931
2618457 | 4
5721668 | 3
378449548 | 3
754882894 | 5
174111111 | 6
174111
17444
177
1

43357.

Corda igitur a c uellet esse 43357. secundũ hãc regulam positionis falsæ iterum examinabo.

21679.

21 11
21 11
42 22
Tantus ergo uellet esse arcus a c.
47. 38.
complementũ arcus a c.
60000
44331
15669
15669
41338
Linea e c.
28662.
Linea d e.
43357
72019
Linea d g.
42 22
42 22
84 44
arcus b c.
59747.
Linea c h.
Respice primam figurã. est enim angulus b d c acutus.
5 16
complementũ arcus b c.
5507.
Linea d h.
60000. 59747.
28662.
59747
28662
119494
358482
358482
477976
119494
53
171246 | 8514
28541
28541.
Linea e k.

60000. 5507.
28662.
28662
5507
200634
143310
143310
31
15784 | 1634
3630
2631.
Linea d k.
43357
43357
303499
216785
130071
130071
173428
1879829449
quadratum e f.
28541
28541
28541
114164
142705
228328
57082
814588681
quadratum e k.
1879829449
814588681
1065240768
quadratum f k.
541
26227 | 3
543322 | 2
141884884 | 6
1065240768 | 3
6645226 | 8
65
6
32638.
Linea f k.

32638
2631
35269
Linea d f.
72019
36009
Medietas lineæ d g.
36009
35269
740
Differentia lineæ d f & medietatis d g.
Faciam secundum regulam positionis falsæ utẽdo duabus positionibus ĩmediate p̃scriptis, quarum una habet errorem additũ & alia diminutũ.
Positio 1.
44794. error additus. 43357. error diminutus.
3245. 740.
44794
740
1791760
313558
33147560
43357
3245
216785
173428
86714
130071
140693465
33147560
173841025
Diuidendus.
3245
740
3985
Diuisor.
43624. Quotiens.
Tanta uellet esse corda a c.
Nunc iterũ examinabo

illud.

21812.

21 19
21 19

42 38

tãtus uellet esse arc9 a c.

47 22

complementũ arcus a c.

60000
44142

15858
15858

31716

Linea c e.

28284.

Linea d e.

43624.

71908.

Linea d g.

42 38
42 38

85 16

arcus b c.

59795.

Linea c h.

4. 44.

complementũ arcus b c.

4951.

Linea d h.

60000. 59795.
28284.

59795
28284

239180
470360
119590
478360
119590

41542 | 1780
169124 |
28187 |

28187.

Linea e k.

60000. 4951.
28284.

28284
4951

28284
141420
254556
113136

140034084

2725 |
4003 | 4084
2333 |

2334.

Linea d k.

43624
43624

174496
87248
261744
130872
174496

1903053376

quadratum e f siue a c.

28187
28187

197309
225496
28187
225496
56374

794506969

quadratum e k.

1903053376
794506969

1108546407

quadratum f k.

5
85
6326

1793897 | 3
229362381 | 3
1108546407 | 2
6666458 | 9
6 6 | 4
6 |

33295.

Linea f k.

2334.

35629.

Linea d f.

71904.

35954.

Medietas d g.

325.

Differentia lineæ d f & medietatis d g.

Iam per regulam positionis falsæ.

Positio 1. Positio 2.
43357. 43624.
Error di. Error di.
740. 325.

43624
740

1744960
305368

32281760

43357
325

216785
86714
130071

14091025

32281760
14091025

18190735

Diuidendus.

740
325

415

Diuisor.

11
313 4

154725 | 4
276548 | 3
18190735 | 8
4155555 | 3
41111 | 3
444 |

43833.

Tanta uellet esse corda a c.

Examinabo illud.

21916.

21 25
21 25

42 50

Tantus uellet esse arcus a c.

47. 10.

complementũ arcus a c.

60000
44000

16000
16000

32000

Linea c e.

28000.

Linea d e.

43833.

71833.

Linea d g.

42 50
42 50

85 40

Arcus b c.

59828.

Linea c h.

4. 20.

Cõplementũ arcus b c.

4534.

Linea d h.

60000. 59828.
28000.

59828
28000

478624000
119656

45154 | 4000
167518 |
27919 |

27919.

Linea c k.

60000. 4534.
28000.

4534
28000

36272000
9068

3 | 2000
12695 |
2115 |

2116.

Linea d k.

43833
43833

131499
131499
350664
131499
175332

1921331889

quadratum e f siue a c.

27919
27919

251271
27919
251271
195433
55838

779470561

quadratum e k.

1921331889
779470561

1141861328

quadratum f k.

2
13
1 7996
561477 | 3
262675247 | 3
1141861328 | 7
6667458 | 9
67 | 1
6

33791.

Linea f k.

2116.

35907.

Linea d f.

71833.

35916.

Medietas lineæ d g.

9.

Differentia lineæ d f & medietatis lineæ d g.

Iam iterum per regulã positionis falsæ.

Positio 1.

43624. 43833.
error di. error di.
325. 9.

43833
325

219165
87666
131499

14245725

43624
9

392616

14245725
392616

13853109

Diuidendus.

325
9

316

Diuisor.

123
2234
3621 | 4
28784 | 3
1415321 | 8
13853109 | 3
3166666 | 8
31111 |
333

43839.

Tanta uellet esse corda a c.

Examinabimus illud.

21920.

21. 26.
21. 26.

42. 52.
arcus a c.
47. 8.
complementũ arcus a c.
60000
43976
16024
16024
32048
Linea c e.
27952.
Linea d e.
43839.
71791.
Linea d g.
42 52
42 52
85 44
Arcus b c.
59834.
Linea c h.
4. 16.
complementũ arcus b c.
4464.
Linea d h.
60000. 59834.
27952.

59834
27952
119668
299170
538506
418838
119668
45423 | 9968
167247
27874
27875.
Linea e k.
60000. 4464.
27952.
27952
4464

111808
167712
111808
111808
53 | 7728
12477
2079
2088.
Linea d k.
27872
27875
139375
195125
223000
195125
55750
777015625
quadratum e k.
43839
43839
394551
131417
350712
131517
175356
1921857921
777015625
1144842296
quadratum f k.
2 5
2338
57673 | 3
26549437 | 3
1144842296 | 8
6667666 | 3
67 | 5
6
33836.
Linea f k.
33836
2080
35916
Linea d f.
71791.
35895 ½.

Medietas lineæ d g.
9.
21.
Differentia linearũ d f, & medietatis d g.
Dum igitur ponitur corda a c 43833. linea d f minor est medietate d g in 9. dũ uero ponit̃ corda a c 43839. linea d f maior est medietate d g in 21. Vellet itaq; corda a c esse inter hos numeros 43833. & 43839. ad hoc ut d f haberetur medietas d g.
Sed nunc explorabo quantã oporteat esse d g, dum triangulus æquilaterus inscriptus circulo, cuius ipsa est semidiameter, isoperimeter fuerit circulo a b c.
$3\frac{10}{70}$ $3\frac{10}{71}$
220. 223.
70. 71.

220
154
15620. 15610.
4970.
Dum ergo semidiamet̃ circuli est 497. semicircumferẽtia est inter hos 1562. & 1561.
Sed linea a d est 60000. quẽadmodũ hucusq; usi sumus. Igitur per præambulum semicircumferentia circuli a b c, erit inter duos.
497. 1561. 1562.
60000.
1561
60000
93660000

1
422
112653 | 1
437287 | 8
5498425 | 8
93660000 | 4
49777777 | 5
499999 | 0
4444

188450.

minor terminus semicircumferentiæ a b c.

1562
60000

93720000

12
12373 | 1
1438571 | 8
4224922 | 8
54864513 | 5
93720000 | 7
49777777 | 1
499999
4444

188572.

Maior terminus semicircumferentiæ a b c.

Semicircumferentia igitur a b c est inter hos, 188450. & 188572. & ideo tota circumferentia inter duplos eorum.

188450.	188572.
188450.	188572.
376900.	377144.

Inter hos est circumferẽtia tota a b c.

Quare & ambitus trianguli isoperimetri e est inter eosdẽ. & ideo per præambulum latus eiusdẽ trianguli est inter tertias horũ terminorum.

11111	12 12
376900	377144
125633	125714
125633	125715

Inter hos est latus dicti trianguli.

Quoniã autem latus trianguli æquilateri potentialiť triplat semidiametrum circuli cui inscribitur, erit data proportio quadrati lateris dicti trianguli ad quadratum semidiametri, & ideo per præambulum quadratũ semidiametri huiusmodi dabitur.

125633
125633

376899
376899
753798
628165
251266
125633

15783650689

Minor terminus quadrati lateris trianguli dicti.

125715
125715

628575
125715
880005
628575
251430
125715

15804261225

Maior terminus quadrati lateris trianguli prædicti.

1 22211
15783659689
5261216896

Minor terminus quadrati semidiametri circuli, cui inscribiť prædictus triangulus.

22 2 1
15804261225
5268087075

Maior terminus quadrati iam dicti.

123
1465
17571 74 | 7
38796595 | 2
5261216896 | 5
14 4 0 6 | 3
4 5 0 | 4
1 4 5
1 4
1

72534.

Minor terminus semidiametri circuli p̃dicti, cui inscribitur triangulus æquilaterus.

31
1128
13269 5 | 7
384835614 | 2
5268087075 | 5
14445016 | 8
11445 | 1
1

72582.

Maior terminus semidiametri circuli, cui inscribitur dictus triangulus. Sed hæc semidiameť secundã tenorem propositionis æqualis debet esse ipsi lineæ d g, quare necesse est lineã d g esse inter hos terminos, 72534. & 72582. si triangulus æquilaterus inscriptus circulo, cuius ipsa est semidiameter, debet esse isoperimeť circulo a b c.

Conclusimus superius cordã a c esse inter hos terminos 43833. & 43839. quorum primus facit, ut linea d f minor sit medietate d g in 9. partibus. secundus autẽ facit ꝙ maior sit in 21. ita

quôd hic quidem est occasio minoris diminutionis, q̃ ille additionis. Si ergo pro minori termino accipiemus 43832. & pro maiori 43838. uerisimiliter tantum minuet d f ex medietate d g propter minorem eorũ, quantum addit propter alterum. Seruemus ergo hos dictos terminos, & omnia per demonstrationes lineares inueniamus, non per tabulam sinus. Continuemus autẽ in figura semidiametrũ a d usq; ad occursum circumferentiæ in puncto m, ductis tribus cordis b c, b m & c m. Est autẽ a c medio loco proportionalis inter d c & c e, quadratũ ergo a c æquatur ei, quod fit ex d c in c e.

43832. 43838.

Inter hos est a c.

43832
43832
87664
131496
350656
131496
175328
1921244224

quadratum a c.

1
192124 | 4224
32020 |

32020. 32021

Inter hos est c e, dum a c est 43832.

27980. 27979.

Inter hos est d e.

43832. 43832.

71812. 71811.

Inter hos est d g.

Quadratum autem a m æquatur quadratis linearum a c & c m.

14400000000.

quadratum a m.

1921244224.

12478755776.

quadratum c m.

11
227 | 1
113888 | 1
357361512 | 1
12478755776 | 7
2222234 0 | 0
222234 | 8
2

111708. 111709.

Inter hos est c m.

Sed proportio d a ad a c est ut c m ad b c. quare per præambulum b c inter duos notos habebitur.

60000. 43832.
111708. 111709.

43832
111708
350656
306824
43832
43832
43832
4896385056

3 2
489638 | 5056
81606 |

81606.

Minor terminus b c.

4896385056
43832

3
489642 | 8888
81607 |

81608.

Minor terminus b c.

81606. 81608.

Inter hos est b c.

81606
81606
489636
489636
81606
652848
6659539236

quadratum minoris termini b c.

81608
81608
652864
489648
81608
652864
6659865664

quadratum maioris termini b c.

6659539236
3600000000
3059539236

Minor terminus eius q̃d fit ex differentia casuum b h & h d in totam b d.

6659865664
36
3059865664

Maior terminus huiusmodi.

51
305953 | 9236
60992 |

54
305986 | 5664
50997 |

50992. 50998.

Inter hos est differentia casuum b h & h d.

9008. 9902.

Inter hos est duplum casus minoris, qui est h d.

4504. 4501.

Inter

Inter hos est casus h d.

Quadratum autem h d cum quadrato c h ualēt quadratū lineæ c d, quare per præambulum c h inter duos notos habebitur.

```
        4504
        4504
       18016
      22520
     18016
    20286016
```

quadratum maioris termini h d.

```
        4501
        4501
        4501
      2250
     18004
    20259001
```

quadratum minoris termini h d.

```
    3600000000
      20286016
    3579713984
```

quadratum minoris termini c h.

```
    3600000000
      20259001
    3579740999
```

quadratum maioris termini c h.

```
      1
     33
    1468        |5
  1198375       |9
  3579713984    |8
   10189666     |3
    11119       |0
      1
```

```
      1
     34
    1471        |5
  1198332       |9
  3579740999    |8
   10189666     |3
    11119       |0
      1
```

59830. 59831.

Inter hos est c h.

Est autem proportio d c ad c h sicut d e ad e k. quare per præambulū e k inter duos notos cōtinebitur.

60000. 59830. 59831. 27979. 27980.

```
        59830
        27979
       538470
      418810
     538470
    418810
   119660
   45554 |
  167298 |3570
   27899 |
        59831
        27980
      4786480
     538459
    418817
   119662
   45   1 |
  167407 |1380
   27901 |
```

27899. 27902.

Inter hos est e k.

Item proportio c d ad d h sicut e d ad d k, quare & d k inter duos notos habebitur.

60000. 4501. 4504. 27979. 27980.

```
        27979
         4501
        27979
      139895
     111916
      55 |
   12593 |3479
    2098 |
        4504
        27980
       360320
      40586
     31528
     9008
   12602 |1920
    2100 |
```

2098. 2101.

Inter hos est d k.

Quadratum autem e f æquatur duobus quadratis e k & k f.

```
        27899
        27899
       251091
      251091
     223192
    195293
   55798
  778354201
```

Quadratus minoris termini e k.

```
        27902
        27902
        55804
      251118
     195314
    55800
  778521604
```

Quadratus maioris termini e k.

```
  1921244224
   778521604
  1142722620
```

minor terminus quadrati f k.

1921244224
778354201
1142890003

maior terminus quadrati f k.

1
55242 | 3
2639842 4 | 3
1142722620 | 8
6667660 | 0
67 | 4
6

1 4
55 943 | 3
263458487 | 3
1142890023 | 8
6667660 | 0
67 | 6
6

33804. 33807.

Inter hos est f k.

33804 33807
2098 2101
35902 35908

Inter hos est d f.

71811. 71812.

inter hos erat d g

35905½. 35906.

Inter hos est medietas d g. nondũ ergo apparet certitudo huius rei, neq; incõueniens aliquod, nã si medietas d g est inter hos 35905½. & 35906. erit necessario etiã inter hos 35902. & 35908. inter quos etiã est ipsa d f.

Huc attende animum.

Aggrediar aliam uiam. In prima facie præcedẽtis cartæ columna tertia conclusimus lineam d g esse inter hos terminos 72534. & 72582. cumq; linea d c sit 60000, erit per præambulum c g inter duos notos.

72534 72582
60000 60000
12534 12582

Inter hos erit linea c g, cui sit æqualis e n. oportet enim d e maiorẽ esse ipsa c g, nam proportio d c ad e g siue a c, est ut a c siue e g ad e c, sed e g maior est ipsa e c, quare & d c maior est linea e g. ablata communi e c relinquit d e maior ipsa c g. Cum igitur sit proportio d c ad c n sicut c n ad c e totius ad totã, sicut abscisæ ad abscisam: erit residuæ d n ad residuam n e sicut totius d c ad totam c n, quare quod sub d n & c n cõtinetur, æquale erit ei quod sub n e & d c. sed quod fit ex n e in d c, est inter duos notos per præambulum.

12534
60000
752040000
12582
60000
754920000

Igitur quod fit ex d n in n c est inter hos duos 752040000. & 754920000.

Sed quod fit ex d n in n c cũ quadrato dimidiæ differentiæ earum æquatur quadrato medietatis d c. quare per præambulum quadratum dimidiæ differentiæ d n & n c inter duos notos habebitur.

30000
900000000

Quadratum medietatis d c.

900000000
754920000
145080000
900000000
752040000
147960000

Quadratum ergo dimidiæ differentiæ linearũ d n & n c est inter hos. 145080000. & 147960000.

2
3 | 1
112 6 | 2
1228484 | 0
145080000 | 4
2244008 | 4
224

2
31
1924 | 1
131453 | 2
3558441 | 1
147960000 | 6
2422 | 3
243
24
2

Igitur dimidia differentia linearum d n & n c est inter hos 12044. & 12164.

30000. 30000.
42044. 42164.

Inter hos est necessario n c linea, cui æqualis est a c.

Quadratum autẽ a c cũ quadrato c m æquipollẽt quadrato diametri a m, quare & per præambulum quadratum c m, & ideo

& ideo etiam ipsa linea c m inť duos terminos notos concludetur.

42044
42044
168176
168176
84088
168176
1767697936

Minor terminus quadrati a c.

42164
42164
1777802896

Maior terminus quadrati a c.

14400000000
1777802896
12622197104

Minor terminus quadrati c m.

14400000000
1767697936
12632302064

Maior terminus quadrati c m.

1
1324
12969 | 1
1721217 | 1
58894356 | 2
12622197104 | 3
222244668 | 4
22224 | 8
222

1
112
3785 | 1
218976 | 1
18225981 | 2
598118925 | 3
12632302064 | 9
222244678 | 3
22224
2

112348. 112394.

Inter hos est c m.

Est autem proportio d a ad a c sicut c m ad b c propter similitudinē triangulorū, quare & per præambulū b c inter duos notos habebitur.

60000. 42044.
42164.
112348.
112394.

112348
42044
449392
449392
224696
449392
5413 |
472355 | 9312
78725

112394
42164
449576
674364
112394
224788
449576
5541 |
473898 | 0616
78983

Hic ostendas angulum b d c esse acutum.

78725. 78984.

Inter hos est b c.

Differētia autē q̄drati b c & q̄drati d c æquať ei q̄d fit ex b d in differētiā casuum b h & h d.

78725
78725
393625
157450
551075
629800
551075

6197625625
3600000000
11524 |
259762 | 5625
43293

78984
78984
315936
631872
710856
631872
552888
6238472256
3600000000
25423 |
263847 | 2256
43974

60000. 60000.

43293. 43974.

Inter hos est differentia casuum b h & h d.

16707. 16025.

8354. 8012.

Inter hos est linea h d.

Quadratum autem h d cum quadrato h c ualēt quadratū d c. Igiť &c.

8354
8354
33416
41770
25062
66832
69789316

Quadratum maioris termini h d.

8012
8012
16024
8012
64095
64192144

Quadratum minoris termini h d.

3600000000
69789316
3530210684

Quadratum minoris termini c h.

3600000000
64192144
3535807856

Quadratum maioris termini c h.

6
7
xxx
266 | 5
57784 | 9
xx49852559 | 4
3530210684 | 1
10188882 | 5
xxx18
1

7
x8
39
x8x8 | 5
x74664 | 9
xx54649212 | 4
3535807856 | 6
x0188892 | 2
xxx18
1

59415. 59463.

Inter hos est linea c h.

Est autem proportio d c ad c h sicut d e ad e k, quare & per præambulũ e k inter duos notos habebitur. Sed prius quærenda est d e.

60000 60000
42164 42044
17836 17956

Inter hos est d n.

12534. 12582.

Inter hos erat c g siue e n.

17836 17956
12534 12582
30370 30538

Inter hos erit d e.

60000. 59415.
59463.

30370.
30538.

59415
30370
4159050
178245
178245
25
x80443 | 3550
30073
59463
30538
475704
178389
297315
178389
324
x8x588 | 1094
30264

30073. 30265.

Inter hos est linea e k.

Item proportio c d ad d h sicut e d ad d k, quare & per præambulũ d k inter duos notos habebitur.

60000. 8012.
8354.

30370.
30538.

30370
8012
60740
3037
24296
24332 | 4440
4055

30538
8354
122152
152690
91614
244304
x3 5
25xxx | 4452
4251

4055. 4252.

Inter hos erit d k.

Cum autem duo quadrata linearũ e k & f k ualeant quadratũ e f, duæ autem lineæ e f & e k sint datæ inter binos terminos, erit & per præambulũ f k inter duos notos.

42044. 42164.

Inter hos est e f siue a c.

30073. 30265.

Inter hos est e k.

30073
30073
90219
210511
90219
904385329

Quadratum minoris termini e k.

30265
30265
151325
181590
60530
90795
915970225

Quadratum maioris termini e k.

Quadrata autem terminorum lineæ e f siue a c æqualis ei superius habẽtur.

1767697936
915970225
851727711
Minor terminus quadrati f k.

1777802896
904385329
873417567
Maior terminus quadrati f k.

21
ſx
638 | 2
14x7515 | 9
49593x1375 | 1
85x7x7777x | 8
4588236 | 4
558

3
3x67 | 2
x37818 | 9
4xxx8573 | 5
873x4775875 | 5
458910 | 3
559

29184. 29554.
Inter hos erit ℔k.

Sic utraq; linearũ f k & d k intẽ duos notos habetur terminos, quare per 3. præambulũ, cõgeries earum inter duos notos conſtituetur.

29184 29554
4055 4252
33239 33860
Inter hos erit linea d f.

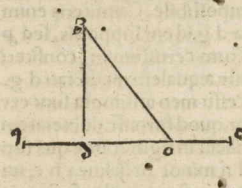
72534. 72582.
Inter hos erat d g.

36267. 36291.
Inter hos eſt medietas lineæ d g.

Dum igit̃ triangulus inſcriptus circulo, cuius ſemidiameter eſt d g, iſoperimeter eſt circulo a b c, neceſſe eſt lineam d f multo minorem eſſe medietate lineæ d g, nã linea d f minor eſt q̃ 33806. quare & minor q̃ 36267. ſed medietas lineæ d g eſt maior q̃ 36267. igitur &c.

Finis laboris maximi. Hoc igitur pacto ad impoſſibile duceris. Eſto ſecundum intentionem tuam, q̃ duæ lineæ d b & d c æque uelociter motæ recedant â linea d a, ſintq; iam in eo ſitu quem ſupponis, ſcilicet q̃ diſpoſitis omnibus, ut concluſio tua ſonat, linea d f ſit ſubdupla lineæ d g: & ob hoc ſit triangulus æquilaterus inſcriptus circulo habenti ſemidiametrũ d g, iſoperimeter circulo a b c. Iam ſequitur ſecundum proceſſum meũ reſoluendo hoc negocium, q̃ in hoc ſitu linea d f multo minor ſit q̃ medietas lineæ d g. Sic lineam d f æqualẽ eſſe medietati d g, & eandem non eſſe æqualẽ medietati d g confiteberis, q̃d eſt impoſſibile. Confiteris enim d f eſſe medietatẽ lineæ d g, id enĩ ſupponis, ſed q̃pter proceſſum iam factum certiſſimum, confiteri cogeris, lineã d f non eſſe æqualem medietati d g. Omnia autẽ in hoc proceſſu meo aſſumpta ſunt certiſſima, præter hoc unum, quod fortaſſe dubietatem ingeret intellectui, q̃ ſcilicet in figuratione quã ſupponit concluſio, linea d n minor ſit q̃ linea n c, ita q̃ punctus n cadat ultra punctum mediæ ſectionis d c uerſus d. Hoc autẽ ſic roborabitur. Ponamus duas lineas d b & d c motibus ſuis peruenisſe ad eum ſitũ ubi a e ſit latus decagoni inſcriptibilis circulo a b c, diſpoſitis q̃ reliquis omnibus ut res ipſa poſtulat, erunt duæ lineæ a e & e d æquales. nam duo trianguli a d c & c a e ſunt æquianguli, duo enim anguli d a c & d c a per quintã primi æquantur, ſimiliter duo anguli a e c & a c e trianguli a e c æquales ſunt: accepto ergo angulo a c e cõmuni duobus triangulis & ad eum cæteris relatis, omnes quatuor dicti anguli inter ſe æquales habebuntur. Hinc & per 32. primi tertius tertio æquabitur. Eſt autem angulus a d c decima pars quatuor rectorũ per ultimam ſexti, & ideo quinta pars duorũ rectorũ; unde angulus d a c duæ quintæ duorũ rectorũ erit: ſed & angulus e a c æqualis angulo a d c quinta pars eſt duorũ rectorum, unde reliquus angulus d a e erit quinta pars duorum rectorũ: duo itaq; anguli d a e & e d a æquales ſunt, unde & duæ lineæ a e & e d æquales conuincuntur. Cũ deniq; e f linea ſit æqualis ipſi a e ſiue a c, & ideo ipſi d e, erit triangulus d e f duorum æqualium angulorũ e d f & e f d, angulus autem e d f eſt duæ quintæ duorũ rectorum, duplus enim eſt ad angulũ e d a, qui erat

quinta pars duorū rectorum: quare angulus d e f erit una quinta duorū rectorum, & triangulus d e f æquilaterus & æquiangulus triangulo a e c. unde & linea d f æqualis reperietur lineæ c e, sed c e est minor q̄ medietas lineæ d g. Cum enim propter similitudinem triangulorum a d c & a e c sit proportio d c ad a c, & ideo ad d e ei æqualem, sicut a c siue d e ad e c, & d c maior est ipsa d e, erit & d e maior linea e c. Sic constat lineam e c minorē esse medietate lineæ d c: quare multo minor erit medietate ipsius d g. ergo & d f minor erit medietate lineæ d g. & ideo oportebit duas lineas d b & d c magis elongari ab ipsa d a, ut crescat linea d f. Si autem posuerimus c n æqualē ipsi a c siue e g, erit linea d n minor linea n c. & ideo à fortiori minor erit linea d n ipsa n c in maiori elongatione linearum d b & d c ab ipsa d a. quāto enim magis elongantur duæ lineæ d b & d c ab ipsa d a, tanto maior redditur linea e c, & etiam tanto maior linea ç n. Quod autem linea d n minor sit linea n c, dum a c est latus decagoni æquilateri circulo a b c inscripti per numeros sic ostendemus.



Semidiameter d c est diuisa in puncto e secundū proportionem habentem medium & duo extrema, est enim proportio c d ad a c siue d e æqualem ei sicut d e ad e c. Videndum igitur quanta sit d e. Diuidatur d c per medium in puncto o, & à puncto d erigatur orthogonalis d p æqualis ipsi d c ducta o p, cui sit æqualis o q. Iā d q linea erit latus decagoni inscriptibilis circulo cuius semidiameter d c.

60000.

Linea d c.

3600000000

9

45000000000

Quadratum o p.

x 2

xx 3775547 | 6
ßßxßßßßßßß | 7
45ßßßßßßßßß | 0
xx 3440816 | 8
xx 334 | 2
1

67082. 67083.

Inf hos est o p siue o q.

30000. 30000.

37082. 37083.

Inter hos est d q. scilicet latus decagoni.

60000 60000

37083 37082

22917 22918

Inter hos est e c, cui est æqualis d n. nam duæ c n & d e sunt æquales. quare ablata cōmuni n e relinquitur d n æqualis ipsi e c.

Sic cōstat d n esse minorē ipsa n c. multo igitur minor erit quando duæ lineæ d b & d c magis elongabuntur à linea a d.

Habemus igitur finem huius rei, quæ iā diu magnum laborem ingessit mihi.

Venetijs die 26. Iunij. Anno 1464. turbata re publica Christiana per hostem suum Mahumetum.

IMmensa summi dei perfectio aperte nobis demonstratur, dum insatiabilem animæ rationalis cupidinem perpendimus: nam & si continuis additamentis nasci soleant artes humanæ, ad plenitudinem tamen earum nunq̃ pertingere licet. Quo namq; amplius in scientijs procedimus, eo plus (mirabile dictu) restare uidetur ad discendum: fitq; deinceps, quemadmodum uulgo dicit̃, ut plura dubitent, qui plura didicere. Summus igitur gradus perfectionis nequaq̃ humanitus attingi potest, sed cognitis scibilibus quantiscũq;, ad alia semper inuenienda tenditur, quod profecto obtigisse arbitror huic uiro celeberrimo ac diligentissimo rerum secretarum inuestigatori: qui post multos modos circũsumerentiam circuli aut eius medietatem rectificandi, areamq; suam quadrandi, sedulo conatus est tradere, quo nam pacto arcui quantolibet æqualis recta designaretur: ac econtra lineæ rectæ quantæcũq; propositæ, quæ minor sit circumferentia circuli dati, æqualis ex ipsa circumferentia arcus abscinderet̃. Ipse tamen, quemadmodum uerba sua sonant, non æqualem circumferentiæ, aut arcui cuilibet rectam assignare pollicetur, sed ei commensurabilem, credẽs fortasse, curuæ circulari æqualem rectam dari non posse, cum, ut uulgus Geometrarum clamat, curui ad rectum non sit proportio, cuius contrarium superius comprobatum est. Pollicetur itaq; curuæ circulari commensurabilem rectã designare ad hunc sensum, ut tot sint pedes, uerbi gratia, recti, in ipsa linea recta designata, quot sunt curui in linea curua proposita, sed reuera fugiendo inconueniens, quod secundum mentem huius philosophi sequeretur, si curuæ circulari

LECTORIBVS.

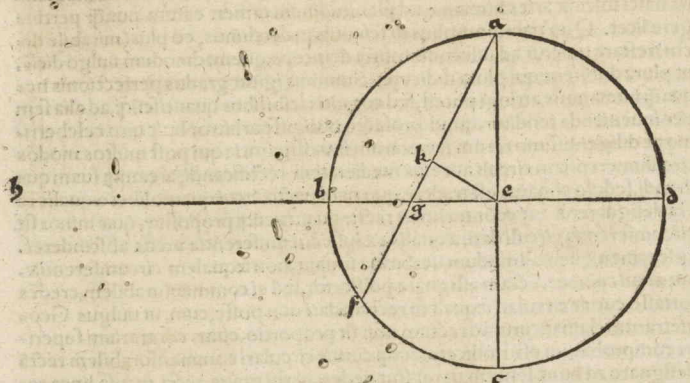
Hactenus progressus est scriptis suis Regiomõtanus, quibus ut nihil dempsimus, sic ne addere qdẽ quicq̃ placuit. Imperfectũ igit̃ opus, ac potius uix instituti particulã hanc curauimus & ipsam apponi, quæ sanè tolli commode poterat. Sed fidem nostram præstare uoluimus, quam gratissimam uobis esse par fuerit, ita ut studium laboremq; nostrum.

Νικόλεω τοῦ κουσαίου ἐλαχίστη μέθοδος τοῦ εὑρεῖν εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ δὲ οὐ μόνον ὅλῃ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, ἀλλὰ καὶ παντὶ τμήματι ἥττονι τῆς τοῦ κύκλου ὅλης περιφερείας ἴσην εὑρίσκειν εὐθεῖαν. πειράσομαι οὖν πρότερον ἀναλῦσαι τοῦτο τὸ πρόβλημα καὶ μεταταῦτα ἑτέρως δὲ αὐτὸ δοκιμᾶσαι, τοῦ θεοῦ διορθοῦντος.

CIrculum a b g d super centro e descriptum, duæ diametri suæ secent in quatuor quadrantes, extendaturq; d b diameter ultra b absq; fine determinato: demittatur corda ex puncto a, quæ sit a f, secans diametrum prædictã in puncto g, hac lege, ut si recta e h sumatur dupla ad eam cordam a f, e g intercepta centro circuli & puncto g sit quarta pars lineæ e h. Dicitur rectam e h esse æqualem semicircumferentiæ b a d.

Pro huius rei executione, ex centro circuli educo ad cordam a f perpendicularem e k. Esto igitur nunc secundum intentionem atq; assertionem inuentoris, linea e h dupla ad cordam a f, & e g quarta pars lineæ e h: & ob hoc linea e h æqualis semicircumferentiæ b a d, liceat demum ponere semidiame

trum e a 4970. particularum, quamobrem semicircumferentia erit inter hos terminos 15610. & 15620. ut ex superioribus iam conclamatum est. Vnde & lineam e h inter eosdem terminos repertum iri constat. Nunc ad numeros descendendum.



15610. 15620.

Inter hos est linea e h.

Est autem a f medietas eius, & ideo per præambulum inter duos notos habebitur.

15610. 15620.

7805. 7810.

Inter hos erit a f.

Ex puncto autem e trianguli a e g rectanguli ad latus recto angulo oppositũ descendit perpendicularis e k. quare per 8. sexti e a erit medio loco proportionalis inter k a & a g, & ideo per 16. sexti & præambulũ linea a g inter duos notos habebitur.

4970
4970
347900
4473
1988
24700900

Quadratum e a.

1217
3368
12913 | 6
6379475 | 3
24700900 | 2
3905855 | 5
39000
399
3

7805. 7810.

3902. 3905.

Inter hos enim oportuit esse a k medietatẽ cordæ a f.

1
32
12112
638834 | 6
24700900 | 3
3902222 | 3
39000 | 0
399
3

6325. 6331.

Inter hos erit a g.

Quare per penultimam primi & præambulum quadratum e g inter duos existet notos.

6325
6325
31625
12650
18975
37950
40005625

Quadratum minoris termini a g.

24700900.

15304725.

Minor terminus quadrati e g.

6331
6331
6331
18993
18993
37986
40081561

Quadratum maioris termini a g.

24700900.

15380661.

Maior terminus quadrati e g.

11	
229	3
6996681	9
15304725	1
67882	2
7	

16	
1374	3
697422	9
15380661	2
67884	1
7	

3912. 3922.

Inter hos erit linea e g.

3	
15610	15620.

3902½. 3905.

Inter hos est quarta ps lineæ e h.

Linea igitur e g maior est q̃ 3912. & ideo multo maior q̃ 3905. sed q̃rta pars lineæ e h siue semicircumferentiæ a b d est minor q̃ 3905. quare linea e g maior est quarta parte lineæ e h. Propter hypothesim itaq; tuam confiteris (quia ponis) e g quartam partẽ esse lineæ e h: & propt̃ enunciationem tuam dicendo e h esse æqualẽ semicircumferentiæ, cogeris concedere lineam e g esse maiorem quarta parte e h, quod implicat contradictionem.

Vel aliter. Quia linea e g ponebat̃ quarta pars ipsius e h, & e h est int̃ hos duos 15610. & 15620. ipsa e g inter q̃rtas partes dictorum terminorũ necessario claudetur, & ideo inter hos 3902. & 3905. sic ipsa minor est q̃ 3905. sed per syllogismũ conclusimus eã esse maiorẽ q̃ 3912. unde & maior erit q̃ 3905. sic maior & minor eodem quod est impossibile.

Aliter ad idem. Quoniam e h est inter hos 15610. & 15620. erit a f inter hos 7805. & 7810. itẽ e g inter hos 3902. & 3905. unde per penultimam primi & præambulum quadratũ e g inter duos notos habebit̃.

3902. 3905.

Inter hos erit e g.

3902
3902
7804
35118
11706
15225604
24700900
39926504

Minor terminus quadrati a g.

3905
3905
19525
35145
11715
15249025
24700900
39949925

Maior terminus quadrati a g.

13	
134	
21968	6
333444	3
39926504	1
122662	8
112	

21	6
33575	3
39949925	2
122664	0
112	

9318. 6321.

Inter hos erit a g.

4970	4970
3905	3902
1065	1068

Inter hos erit b g.

4970	4970
3902	3905
8872	8875

Inter hos erit g d.

Quod autem fit ex b g in g d, æquatur ei quod ex a g in g f, quare & g f inter duos notos habebitur.

1065. 1068.

8872. 8875.

8872
1065
44360
53232
8872
9448680

Minor terminus producti ex b g in g d.

8875
1068
71000
53250
8875
9478500

Maior terminus producti ex b g in g d.

Cūq̄ a g inter duos notos sit, erit per præambulum & g f inter duos notos.

6318. 6321.

Inter hos erat a g.

5
8361
8523
79945 1
3777296 4
9448680 9
8322221 4
8322
833
6

x1 1
3285 5
947850 0
8318888 0
8321
833
6

1494. 1501.

Inter hos erit g f.

6318. 6321.

7812. 7822.

Inter hos erit a f.

Sed propt hypothesim erat inter hos 7805. & 7810. ppt hypothesim ergo minor est q̄ 7810. & ideo minor q̄ 7812. sed per agumētationem ex eadē hypothesi procedēte maior ē q̄ 7812. sic maior & minor eodē quod est impossibile.

Venetijs die 28. Iunij. Anno 1464.

προσηδυνῆς γενομένης τῆς ζιήρεως τῆ θεασάτου μου.

πῶς τα τὰ γεγραμμένα ἐπιχειρήματα τῷ ἀναλυσιν γενόνασι. νῦν δὲ κατ' ἄλλον μέθοδον θ' δοτέραν τὸ αὐτὸ δεικνύεις.

Quoniam autem e h ponit dupla ad a f, & quadrupla ad e g, erit a f dupla ad e g, & ideo a k æqualis ipsi e g.

Pono itaq̄ a h rem.

Vnus census erit quadratum eius a h.

Ponaturq̄ ut prius e a 4970.

24700900.

quadratum e a.

Id aufero ex uno censu, scilicet quadrato a g, relinquit unus census dēptis inde 24700900. nā a liter exprimi nequit. erit ergo quadratum e g & inde a k unus census dēptis 24700900.

Est autem e a per 8. sexti medio loco proportionalis inter h a & a g, quare per 21. sexti quadratū e a erit medio loco proportionale inter quadrata linearum h a & a g. & ideo quadratū e a in se ductum æquabitur ei quod fit ex quadratis linearum h a & a g, alterius scilicet in alterum. Sed non mireris q̄ quadratū in quadratum duci iubeatur, cum ductio in lineis dūtaxat locum habeat, hoc enī quo pacto & fiat & intelligēdū sit alibi ostenditur, facileq̄ trahitur ex cōmēto Campani sup ultima decimi elementorum.

24700900
24700900
222308 10000
1729063
988036
494018

610134460810000

Quadratū quadrati e a.

1. census.

1. census demptis

24700900.

1. census de censu demptis 24700900. cēsibus. Hoc fit ex quadrato h a in quadratum a g.

Quare 1. census de censu dēptis 24700900. censibus, æquatur

610134460810000.

Restaurandoq̄ diminuta sicut præcipitur in Algebra, erit unus census de cēsu æq̄lis 24700900 censibus &

610134460810000.

Vtendo igitur censu de censu tamq̄ censu, agemus per capitulum sextum Algebræ donec reperiemus substantiā rei quæ tamen res est census in hoc proposito; cuius tandē Cēsus totus. radix q̄drata erit numerus lineæ a g.

nūs
res

24700900.

12350450.

Medietas numeri rerū.

Hic numerus in se multiplicandus esset, sed cū sit medietas de 24700900. cuius quadratum superius procreatū est, erit quadratus numeri rerū dimidiatarū quarta pars huiusmōi magni quadrati.

x x xx x x
81x8x3446081x0000

15253361520250 0
quadratus numeri dimidiati rerum.

15253361520250 0
610134460810000

76266807601250 0

4
81 7
3xx 8
52753 | 2
3 2649744 | 7
3x924727787745 | 6
343258958258975 | 1
2826888076012500 | 6
4545xxx322888 | 4
8885xx332 | 4
88552 | 5
5

27616445 27616446
12350450 12350450

39966895 39966896

Inter hos erit substantia rei, quam hactenus quæsiuimus, sed hæc res in ueritate census erat. Accipio ergo radices quadratas, si quæ sint, horũ numerorum.

1 | 1
x | x
xx18 | 6 xx18 | 6
3374454 | 3 3374455 | 3
39986898 | 2 39986896 | 2
xx2664 | 1 xx2664 | 1
x 2 x 2
1 1

6321. 6322.

Inter hos est a g.

Quare per penultimam primi & præam. e g intẽ duos notos cõtinebit.

6321
6321
6321
12642
18963
37926

39955041
24700900

15254141

Minor terminus quadrati e g. 6322
6322

12644
12644
18966
37932

39967684
24700900

15266784

Maior terminus quadrati e g. 5 | 3
8849 16 | 9
xx2541 4xx | 0
87880 | 5
7

2 | 3
8857135 | 9
xx2567784 | 0
67880 | 7
7

3905. 3908.

Inter hos erit e g.

Igitur si linea a f debet esse dupla ad ipsam e g, quemadmodũ ad hypothesim statim sequitur, necesse est lineã e g reperiri inter hos duos terminos 3905. & 3908. Quare & per præambulum linea e h quadrupla eius intẽ duos notos collocabitur.

3905 3908
4 4

15620 15632

Inter hos erit linea e h.

15610. 15620.

Inter hos erat semicircũferentia b a d.

Sed linea e h maior est q̃ 15620. & semicircumferẽtia minor q̃ 15620. Quare linea e h maior est semicircumferẽtia p̃dicta, quod est contra enunciationẽ inuentoris. Illud bene consonat supra memoratis. Nã quãdo ponebatur e h æqualis semicircumferentiæ, erat e g maior quarta ipsius e h. Oportuit ergo lineam e h maiorẽ fieri & consequenter à f maiorem, si e g debuit esse quarta ipsius e h. quo facto, e h maior habetur semicircũferẽtia p̃dicta.

Poterit quispiã hæsitare circa id q̃d supius concluſum est, lineã e g contineri intẽ hos duos 3905. & 3908. si debeat esse medietas lineæ a g, & ideo quarta pars ipsius e h. Quamuis enim bene id concluſũ sit, uia tamẽ huius inuẽtionis perpaucis cognita est. Rarissimi enim artem rei & cẽsus, quam Algebrã plerique nominant Arabico uocabulo, satis didicerunt. Ideo p media aptiora id cõfirmandũ cẽsui. Quòd aũt nõ possit esse 3908. neq; maior, hac lege declarabimus.

Esto linea e g 3908.

3908
3908
31264
35172
11724

15272464

15272464
24700900
39973364

Quadratum a g.

1
356
2467 | 6
338198 | 3
39973364 | 2
122664 | 2
112

6322. 6323.

Inter hos erit a g.

4970
3908
8878

Linea g d.

1062.

Linea b g.

8878
1062
17756
53268
8878
9428436

7
98
5361
77744 | 1
3185263 | 4
9428436 | 9
6323333 | 1
63222
633
6

2
183
5376
77883 | 1
3186654 | 4
9428436 | 9
6322222 | 1
63222
633
6

1491. 1492.

Inter hos erit g f.

6322. 6323.

7813. 7815.

Inter hos erit a f.

3906½. 3907½.

Int hos erit medietas lineæ a f, scilicet linea a k.

Sed erat linea e g 3908. maior ergo q̃ 3907½. & ideo multo maior medietate lineæ a f. Non potuit igitur linea e g esse 3908. si saltem debuit esse medietas lineæ a f. Nec poterit esse maior q̃ 3908. quãto enim crescit linea e g, tanto decrescit corda a f: multo igitur maior redderetur e g q̃ sit medietas lineæ a f. Non deniq; poterit esse 3905. si saltem debebit esse q̃rta pars cordæ a f. Sit enim e g 3905. erit per penultimam primi quadratũ a g notum.

3905
3905
19525
35145
11715
15249025

Quadratum e g.

24700900.

39949925.

Quadratum a g.

21 | 6
33575 | 3
39949925 | 2
122664 | 0
112

6320. 6321.

Inter hos erit a g.

Quod autem fit ex b g in g d æquatur ei quod fit a g in g f, & ideo per præambulum linea g f inter duos notos habebit: inde quoq; tota corda a f cum eius medietate.

4970
3905
8875

Linea g d.

1065.

Linea b g.

8875
1065
44375
53250
8875
9451875

1
329
6635
7156 | 1
313248 | 4
9451875 | 9
6321111 | 5
63222
633
6

33
665
7164 | 1
31335 | 4
9451875 | 9
6320000 | 5
63222
633
6

1495. 1946.

Inter hos erit g f.

6320. 6321.

7815. 7817.

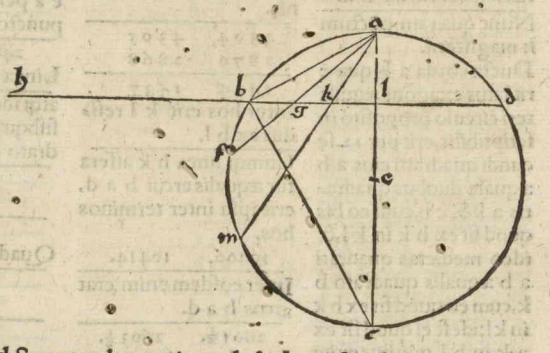
Inter hos erit corda a f.

3907½. 3908½.

Inter hos erit medietas cordæ a f, scilicet linea a k.

Cũ itaq; linea e g sit posita

sita 3905. erit ipsa minor q̄ 3907. sed medietas a f maior est q̄ 3907. quare linea e g minor erit q̄ medietas cordæ a f. Non poterit igitur esse 3905. si debebit esse medietas de a f. sed neq̄ minor, nam quanto linea e g decrescit, tanto a f corda fit maior, & eius etiam medietas maior. Prius autē non potuit esse 3908. neq̄ maior, quare necessario linea e g inter hos terminos 3905. & 3908. claudetur, si debebit esse quarta pars cordæ a f. Sed linea e g existente inter dictos terminos, ipsaq̄ existente quarta parte totius e h, quemadmodū supponitur, linea e h necessario maior est semicircumferentia sæpe dicta: quod est contra sententiam eius qui arcum circuli dirigere conabatur. Hæc autem inuentio cæteris plurimis adinuentionibus suis eo abundantior uisa est, quo illæ quidem circumferentiæ totalis aut eius medietati æqualem rectam definire pollicent̄, hæc uero nō modo totius circumferētiæ, sed & cuiuslibet portionis eius longitudinem in rectum uertere molitur. Quod ut manifestius reddatur, exemplari figuratione utendum censeo.



Circuli a b c d super e cētro lineati, arcus accipiatur b d q̄ntuscūq̄, minor tñ semicircūferentia, quē subtendat corda sua b d, sagittaq̄ a l protensa ultra centrū, offendat circumferētiam circuli in pūcto c. erit itaq̄ a uertex portionis b a d. Sumatur demum in corda b d punctus k, tantum distans per rectam lineam â uertice portionis a, quātum â b altero termino portiōis. Hunc punctum magisterij uocauit uir ille, ꝙ ab eo tanq̄ radice totū fermè præsens pendeat negocium. Ducatur insuper ex̄ puncto a corda a f, & corda d b directe continuetur usq̄ ad h, donec h k sit dupla ad cordam a f, & quadrupla ad lineam g k: unde & cordam a f duplam esse lineæ g k consequitur. Asserit inuentor ille lineam rectam h k commensurabilem esse arcui b a d: uidet̄ uoluisse dicere æqualem. Hoc pacto cuilibet arcui proposito, qui minor est semicircumferentia, æqualem rectam assignare conatur.

Ponamus igitur, exercitij gratia, arcum b a d tertiam partem circumferentiæ: semidiametrum autem e a ut prius 4970. & ideo semicircumferentiam in ter hos duos 15610. & 15620. sintq̄ omnia ut disponuntur & asseruntur.

15610	15620
15610	15620
31220	31240

Inter hos erit tota circūferentia.

$10406\frac{2}{3}$.	$10413\frac{1}{3}$.
10406.	10414.

Inē hos erit arcus b a d.

Quærēda est primo corda b d, scilicet latus trianguli æquilateri circulo inscriptibilis, ipsū autem potentialiter triplū ē semidiametro circuli.

4970
4970
347900
4473
1988
24700900

24700900
3
74102700

Quadratũ b d siue b c.

165 | 8
14546136 | 6
74102700 | 0
167220 | 8
117

8608. 8609.

Inter hos est b d.

4304. 4304.

Inter hos est b l, medietas scilicet cordæ b d.

Nunc quæram pũctum k magisterij.

Ducta corda a b, quæ erit latus exagoni æquilateri circulo proposito inscriptibilis, erit per 12. secundi quadratũ eius a b æquale duobus quadratis a k & k b, cum eo bis quod fit ex b k in k l, & ideo medietas quadrati a b æqualis quadrato b k, cum eo quod fit ex b k in k l: idest ei quod fit ex a k in b l, ponitur enim b k æqualis ipsi k b.

24700900.
12350450.

quod fit ex b k in b l.

233
356
35987
474611 | 2
12350450 | 8
4305555 | 6
43000 | 8
433
4

2
245
3512
359937 | 2
4742214 | 8
12350450 | 6
4304444 | 9
43000
433
4

2868. 2870.

Inter hos erit b k. & tantum distat punctus magisterij à uertice portionis.

4304 4305
2870 2868

1434 1437

Inter hos erit k l residua ex b l.

Cumq; linea h k asseratur æqualis arcui b a d, erit ipsa inter terminos hos.

10406. 10414.

Inter eosdem enim erat arcus b a d.

2601½. 2603½.

Inter hos erit quarta ps h k, scilicet ipsa g k.

& ideo inter hos.

2601 2604.

1434. 1437.

4035. 4041.

Inter hos erit g l.

Est autem per 8. sexti a b medio loco proportionalis inter c a & a l.

4970
4970
9940

Linea c a.

4
15
824
1249 | 2
48622 | 4
69247 | 8
24700900 | 5
9940000
99444
999
9

Sed nõ erat opus hac diuisiõe, demõstrari enim potest, semidiametrum e a per æqualia secari in puncto l.

2485.

Linea a l.

atq; idcirco quadratũ a l subquadruplum est quadrato e a.

32 12
24700900
6175225

Quadratum a l.

4035
4035
20175
12105
16140
16281225

Quadratum minoris termini g l.

4041
4041
4041
16164
16164
16329681

Quadratum maioris termini g l.

16281225
6175225
22456450

Minor terminus quadrati a g.

16329681
6175225
225049,06

Quadratum maioris termini a g.

7
x8
818
3933 | 4
8864576 | 7
xx45845 03 | 3
89446 | 8
9

x8
398
45715 | 4
8918367 | 7
xx50490004 | 4
89448 | 3
9

4738. 4744.

Inter hos erit a g.

4304 4305
4041 4035

263 270

Inter illos est b g.

4304 4305
4035 4041

8339 8346

Inter hos est g d.

Quare quod fit ex b g in g d inter duos notos continebitur.

8339
263

25017
500,34
16678

2193157

Minor terminus eiꝰ q̃d ex b g in g d.

8340
270

584220
16692

2253420

Maior terminus eius q̃d ex b g in g d. Illud aũt æquaẽ ei quod sub a g, g f continetur. cumq; a g sit inær duos notos, erit & g f inter duos notos &c.

1
x4
xx8
25392
39813
51785,19 | 4
xx9315576 | 6
47444442 | 2
4744
47

2
3
x68
779
5957
38811
87120 | 4
xx534120 | 7
47388885 | 5
4733
47

462. 476.

Inter hos est g f.

4738. 4744.

5200. 5220.

Inter hos est corda a f.

2600. 2610.

Inter hos erit medietas cordæ a f.

2601. 2604.

Inter hos erat g k.

Quare & g k inter præscriptos erit terminos, scilicet 2600. & 2610. inter quos erat medietas cordæ a f. Incertum igitur adhuc est, an g k sit æqualis medietati cordæ a f, an maior aut minor ea, q̃d hactenus scrutabamur. Id autẽ ex eo uenit, q; terminos nimis distantes assumpsimus, & potissimũ q; 4970. particulæ semidiametri e a nimium grossæ sunt. Nũc subtiliores ponam ueritatis explorãdæ gratia.

Ponaẽ semidiameter e a particularum 497000. & ob hoc semicircumferentia inter hos 1561000. & 1562000.

1561000. 1562000.
1561000. 1562000.

3122000. 3124000.

Inter hos erit tota circũferentia.

1040666. 1041334

Inter hos erit tertia pars circumferẽtiæ, scilicet arcus b a d.

Quærenda est prius corda b d, latus scilicet triãguli æqlateri circulo inscriptibilis, q̃d quidẽ potentialiter triplum est semidiametro circuli.

247009000000.
quadratũ semidiametri.

3

741027000000.
Quadratum b d.

32
x864437 | 8
358788 | 6
x858947725 | 0
x4546137886493 | 8
x4x0x7700000000 | 2
x87x70x8864 | 9
xxxxx21
17
1

860829.
860830.

Inter hos est corda b d.

430414.
430415.

Inter hos eſt b l, mediẽtas ſcilicet cordæ b d.

Deinde quæram pũctũ k magiſterij, ut antea.

247009000000.

123504500000.

quod fit ex b k in b l.

```
                  435
                 2441
                 8272
                 5443
               2.41884 1
              35499599 |2
              35981212817 |8
              47427274258 |6
              4235045000000 |9
              43041555555 |4
              4304111111 |2
               430.4444
               43000
                433
                 4
```

```
                  1
                 72
                 83
                 9515
                 8726
               24181375
              354895936 |2
              35981927281 |8
              47422786448 |6
              42350450000000 |9
              4304144444444 |4
               430411111 |3
               430.4444
               43000
                433
                 4
```

286942.
286944.

Inter hos erit b k.

430414	430415
286944	286942
143470	143473

Inter hos erit k l.

Cũq; linea h k aſſeratur æqualis arcui b a d, erit ipſa inter hos terminos.

1040666. 1041334.

Inter eoſdem enim erat arcus b a d.

260166. 260334.

Inter hos eſt quarta ps lineæ h k, ſc3 linea g k.

260166	260334
143470	143473
403636	403807

Inter hos erit linea g l.

497000.

298500.

Linea a l.

403636	
403636	
2421816	
1210908	
2421816	
1210908	
1614544	
162922020496	
403807	
403807	
2826649	
3230456	
1211421	
1615228	
163060093249	

247009000000.

61752250000.

Quadratũ a l, eſt enim a l mediẽtas ſemidiametri e a, & ideo quadratũ eius quarta pars quadrati e a.

162922020496	
61752250000	
224674270496	

Minor terminus quadrati a g.

163060093249	
61752250000	

224812343249.

Maior terminus quadrati a g.

```
                  1
                 726
                 8857
               9273764 |4
              2733857575 |7
              3949434419 |3
             88755586835 |9
             22487427504989 |9
              8466886 |8
               9479
                947
                 94
                  9
```

```
                  7
                 3958
               44508 |4
              3331913 |7
              8898535 |4
             22481273437249 |1
              8482 |4
               948 |3
                948
                 94
                  9
```

473998. 474144.

Inter hos erit a g.

430414	430415
403807	403636
26607	26779

Inter hos erit b g.

430414	430415
403636	403807
834050	834222

Inter hos erit g d.

```
                834050
                 26607
               5838350
                500430
                500430
                166810
```

221915683.50

minor terminus eius ꝙd fit ex b g in g d.

834222
26779
7507998
5839554
5839554
5005332
1668444
22339630938

Maior terminus eius q̊d fit ex b g in g d.

2
4
61
3 1726
464937
8812697
322584281 | 4
6337964138 | 6
22191568350 | 8
4741444444 | 0
47414444 | 3
474111
4744
47
2
141
6123
582325
3787281 | 4
34894854 | 7
651371419 | 1
22339630938 | 3
4739988888 | 0
47399999
473999
4733

46803. 47131.

Inter hos est g f.

473998 474144
46803 47131
520801 521275

Inter hos est corda a f.

260400½. 260637½.

Int̃ hos est medietas cordæ a f.

260166. 260334.

Inter hos erat linea g k.

Quamobrem linea g k minor existẽs q̃ 260334. minor quoq; erit q̃ ille 260400. Sed medietas cordæ a f maior est q̃ 260400. quare linea g k multo minor est q̃ medietas cordæ a f. Ex hypothesi autẽ linea g k habebatur æqualis ipsi medietati a f. Sic æqualis alicui & minor eodẽ q̊d est impossibile. Non est ergo linea recta h k æq̃lis arcui b a d.

Posset præterea simile examen fieri, ponẽdo arcum b a d decimã partem, aut quintã aut quartã totius circumferentiæ partem, sed quoniam labor plurimus est, & ex cõmemoratis finẽ eius consecuti sumus, hic nõ iniuria quiescendum cẽsui.

Venetijs die 29. Iunij. Anno 1464.

τέλος τούτου τραίγματος τοῦ δυσκολωτάτου.

ἰωάννης ὁ γερμάνος τὰ τῆς ἀληθείας κρυπτὰ πανταχοῦ ζητήσας, ταύτην τῶν ἀριθμῶν διάλεξιν ἐποίησε.

QA33
.M88
Rare Bk. Coll

ERRATA RECOGNITI OPERIS.

Pagina 6.linea 5.lege diuideretur.Ibidem linea 36.lege dictarum pro differentiarum.Pagina 7.lin: 15.lege ꝙ si semidiameter. Pagina 11.lin:5.pro puncto lege puta.Ibidem li:22.diameter.Pagi:12.in calce lege releuare.Pagi:13. li:15.quadrate.Pagi:14.li:41.lege Probatur.Lin:44.lege & hoc probat prima suppositio.Li:45.lege maiorem.Pag:15.li:16.lege orthogonalis. Lin:23.pro ac lege aut. Pagi:22.lin:38.lege licuit.Pag:33.lin:38.lege numeros.Pagi:34. lin:35.lege erunt. Pag:40.li:21.pro magis lege maius.Pagina:41.lin:14.lege sunt.Pag:45.columna 2.lin:7.pro e t lege e l.Eadem pag:colũ:3.lin:11.lege Similiter.Pag:46.col:2.lin:12.lege priuꝰ computatis. Ibidem col:3.lin:5.in fine pro o pone 9.Pag:47.col3.li:21.lege 3514.Pag:50.li:12.lege linea t r inter hos duos. Pag:53.lin:23.lege superant. Pag 54.col:1.lin: 16. pro $3\frac{10}{17}$ $3\frac{1}{2}$ lege $3\frac{1}{7}$ $3\frac{10}{71}$.Ibidem lin:penultima pro 347009.lege 247009.Lin:39.lege circulo a b g dato,delendo d.Pag 64.lin:7.pro 6167925625.lege 6197625625.Pagina 67.col:3.lin:7.ab infra scandendo pro 196656 lege 296656.Pag:68.col:1.lin: 6. dele 9 in primo loco.Ibidem lin:5.ascendendo lege fit.Ibidem col:3.lin:16 ꝓ 27.lege 72.Pag:69.col:2.li:12.ascẽdendo pro 37085.pone 37082. Pagina 72.col:1.lin:11.ascendendo pro 470360.pone 478360. Ibidẽ col:3.lin:10.ascendendo pro 3134.pone 3234.Pag:74.col:2.lin:9.pro 2088.pone 2080.Lin: 11.pro 27872.pone 27875.Lin:23.pro 131417.pone 131517.Pag:76.col 3.li: ascendendo 12.pro 60992.lege 50992.Pagina:77:col:3.lin:19.ascẽdẽdo pro 167298.lege 167398. Lin:14.ascendẽdo pro 538459.pone 538479.Ibidẽ col: 3.lin:9.ascẽ:ꝓ 55800. pone 55804. Pag.79.col:3 li:20.ꝓ 43974.pone 43975. Pag.81.col:1.lin:12.ascen:pro 33860.pone 33806.Pag:88.col.2.li. penult.lege fit ex a g.Pag.90.col.1.li.30.lege b k in b l,& seq.lege a k æqualis.

EXCVDEBATVR NORIMBERGAE PER
IOH. PETREIVM ANNO
M. D. XXXIII.
MENSE AVGVSTO.

2102C2
24 Mr 44

Ap. 29, 44

Bound Sept 1944